

**Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie
 für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

- (a) Es seien A, B, C Ereignisse, also Teilmengen, des Ergebnisraums Ω . Drücken Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von A, B, C in Mengenschreibweise aus.
 (i) Unter den drei Ereignissen A, B, C tritt nur das Ereignis C ein.
 (ii) Es treten genau zwei der drei Ereignisse ein.
 (iii) Es tritt mindestens ein Ereignis ein.
 (b) Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten, darunter 4 Buben. Die Karten werden gut gemischt und dann nacheinander aufgedeckt.
 (i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte aufgedeckte Karte ein Bube ist?
 (ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste und die sechste aufgedeckte Karte jeweils ein Bube ist und unter den Karten zwei bis fünf kein Bube ist?

Aufgabe 2 (10 Punkte). In einer Fabrik werden Kirschen entkernt. Dazu werden zwei Maschinen verwendet. Jede Roh-Kirsche wird entweder an Maschine A oder an Maschine B entkernt. Maschine A bearbeitet 80% der Kirschen und entfernt 95% aller Kerne. Maschine B bearbeitet 20% der Kirschen und entfernt 70% aller Kerne.

Zum Schluss werden die bearbeiteten Kirschen noch kontrolliert. Dabei werden 90% aller Kirschen, die fälschlicherweise den Kern noch enthalten, aussortiert. Allerdings werden auch 10% der Kirschen ohne Kern aussortiert.

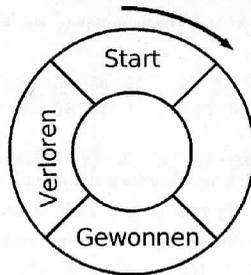
Die nicht aussortierten Kirschen werden dann verkauft.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Roh-Kirsche nach Bearbeitung einen Kern enthält und verkauft wird.
 (b) Ein Kunde kauft eine Packung mit 100 Kirschen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Kirschen der Packung entkernt sind?
 (c) Es werden N verkaufte Kirschen betrachtet. X_N sei die Anzahl der entkernten Kirschen. Zeigen Sie:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(X_N > \frac{163}{164}N) = 0.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Es sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, mit $P(Y_n = k) = \frac{1}{5}$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Wir betrachten folgendes Spielbrett, das aus vier Feldern besteht.



WT - H 2009

Man stellt zu Beginn seine Spielfigur auf das Feld "Start". Dann zieht man die Figur im Uhrzeigersinn weiter, zunächst um Y_1 Felder, dann um Y_2 Felder, usw., wobei man unter Umständen mehrere Umrundungen durchführt. Sobald die Figur jedoch auf dem Feld "Gewonnen" oder "Verloren" landet, wird sie nicht mehr bewegt.

- (a) Modellieren Sie die Position $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Spielfigur als Markoffkette auf einer vierelementigen Zustandsmenge: Geben Sie den Übergangsgraphen an.
 (b) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
 (c) Bestimmen Sie die Verteilung der zufälligen Position der Spielfigur nach zwei Zügen.
 (d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielfigur auf dem Feld "Gewonnen" landet.
 (e) Bestimmen Sie die mittlere Spieldauer (also die Anzahl der Züge, bis die Figur auf "Gewonnen" oder "Verloren" landet).

Aufgabe 4 (10 Punkte). Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & : x \in [-2, 2] \\ 0 & : x \notin [-2, 2] \end{cases},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Weiter sei Y eine Zufallsvariable, gegeben durch $Y = X^2$.

- (a) Wie muss a gewählt werden, damit f eine Dichte wird?
 (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y .
 (c) Ermitteln Sie eine Dichte von Y .
 (d) Bestimmen Sie $P(Y \geq 1 | X \leq 0)$.
 (e) Bestimmen Sie $E(X), V(X)$ und $E(Y)$.
 (f) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie für Elektrotechniker

Lösung 1.

- (a) Es gibt jeweils mehrere Möglichkeiten, die Ereignisse darzustellen. Hier einige Möglichkeiten:
 (i) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ oder $C \setminus (A \cup B)$.
 (ii) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$ oder $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$.
 (iii) $A \cup B \cup C$.
 (b) Wir nummerieren die Karten von 1 bis 32 durch, wobei die vier Buben die Nummern 1 bis 4 erhalten sollen.
 (i) Die Reihenfolge, in der die Karten aufgedeckt werden, spielt hier keine Rolle. Daher kann das Problem modelliert werden durch den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega_1 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_j \in \{1, \dots, 32\}, k_i \neq k_j \text{ für } i \neq j\}$, wobei k_i die i -te gezogene Karte beschreibt, mit Gleichverteilung. Es ist $|\Omega_1| = 32 \cdot 31 \cdot 30$. Die günstigen Ausgänge sind:

Die ersten beiden Karten sind kein Bube, und die dritte Karte ist ein Bube oder die erste Karte ist ein Bube, die zweite Karte nicht, und die dritte Karte ist ein Bube oder die erste Karte ist kein Bube, die zweite und dritte Karte sind ein Bube oder die ersten drei Karten sind ein Bube.

Daher ist die Anzahl der günstigen Ausgänge

$$= 28 \cdot 27 \cdot 4 + 4 \cdot 28 \cdot 3 + 28 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 28 \cdot 4 \cdot 30 + 30 \cdot 4 \cdot 3 = 31 \cdot 30 \cdot 4.$$

WT - H 2009 Somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit = Anzahl der günstigen Ausgänge / Anzahl aller Ausgänge = $31 \cdot 30 \cdot 4 / (32 \cdot 31 \cdot 30) = 1/8$.

(ii) Diesmal modellieren wir das Problem mit dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega_2 = \{(k_1, \dots, k_6) : k_j \in \{1, \dots, 32\}, k_i \neq k_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Wieder liegt Gleichverteilung vor. Die Menge der günstigen Ausgänge ist also

$$G = \{(k_1, \dots, k_6) : k_1, k_6 \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ und } k_2, \dots, k_5 \in \{5, \dots, 32\}\},$$

und die Anzahl der günstigen Ausgänge ist $|G| = 4 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 3$. Die Anzahl aller Ausgänge ist $|\Omega_2| = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$, und somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$|G|/|\Omega_2| = \frac{4 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 3}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27} = \frac{12 \cdot 26 \cdot 25}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{13 \cdot 5}{31 \cdot 29 \cdot 8}$$

Lösung 2.

(a) Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit p_1 , dass die Kirsche nicht entkernt wird:

$$p_1 = 0,8 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,04 + 0,06 = 0,1.$$

Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0,1 \cdot p_1 = 0,01$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit p_3 , dass eine Kirsche entkernt wird und verkauft wird, ist

$$p_3 = 0,9 \cdot (1 - p_1) = 0,81.$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine verkaufte Kirsche entkernt ist:

$$\begin{aligned} p_4 &= P(\text{"Kirsche wird entkernt"} \mid \text{"Kirsche wird verkauft"}) \\ &= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"}) / P(\text{"Kirsche wird verkauft"}) \\ &= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"}) \\ &/ P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"} \text{ oder } \text{"Kirsche wird nicht entkernt und verkauft"}) \\ &= P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"}) \\ &/ [P(\text{"Kirsche wird entkernt und verkauft"}) + P(\text{"Kirsche wird nicht entkernt und verkauft"})] \\ &= 0,81 / [0,81 + 0,01] \\ &= \frac{81}{82}. \end{aligned}$$

Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass eine 100er-Packung aus nur entkernten Kirschen besteht, gleich

$$p_5 = p_4^{100} = \left(\frac{81}{82}\right)^{100}.$$

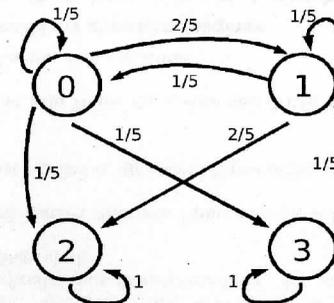
(c) Es sei Y_n die Zufallsvariable mit $Y_n = 0$, falls die n -te Kirsche nicht entkernt ist und $Y_n = 1$, falls die n -te Kirsche entkernt ist. Dann sind Y_1, \dots, Y_N stochastisch unabhängig und identisch verteilt, und es gilt $X_N = \sum_{n=1}^N Y_n$. Außerdem ist $E(Y_1) = p_4 = \frac{81}{82}$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen folgt

$$\begin{aligned} P(X_N > \frac{163}{164} N) &= P\left(\frac{1}{N} X_N - \frac{163}{164} > 0\right) = P\left(\frac{1}{N} X_N - \frac{81}{82} > \frac{163}{164} - \frac{81}{82}\right) \\ &\leq P\left(\left|\frac{1}{N} X_N - \frac{81}{82}\right| > \underbrace{\frac{163}{164} - \frac{162}{164}}_{>0}\right) \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

WT - H 2009

Lösung 3.

(a) Wir nummerieren die Felder durch: Startfeld = 0, unbeschriftetes Feld = 1, "Gewonnen" = 2, "Verloren" = 3. Wir erhalten folgenden Übergangsgraphen.



(b) Die zugehörige Übergangsmatrix lautet

$$P = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) Durch Quadrieren der obigen Matrix erhält man die Übergangsmatrix vom Zustand zum Zeitpunkt Null zum Zustand zum Zeitpunkt zwei. Aus ihr bestimmen wir die Verteilung der Figur nach zwei Zügen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/25 & 4/25 & 10/25 & 8/25 \end{pmatrix}.$$

Also lautet die Verteilung nach zwei Zügen

$$P(X_2 = 0) = 3/25, P(X_2 = 1) = 4/25, P(X_2 = 2) = 2/5, P(X_2 = 3) = 8/25.$$

(d) Es sei p_k die Wahrscheinlichkeit, dass die Markoffkette im Zustand 2, also "Gewonnen", absorbiert wird, wenn das Startfeld k ist ($k = 0, 1, 2, 3$). Der Rand der Markoffkette ist $R = \{2, 3\}$. Gemäß Skript S.28, 7.10, gilt dann für $k = 0, 1$:

$$p_k = \sum_{j=0}^3 p_j p_{kj},$$

wobei p_{kj} die Einträge der Übergangsmatrix bezeichne. Außerdem gilt $p_2 = 1, p_3 = 0$. Somit erhalten wir

$$p_0 = \frac{1}{5} p_0 + \frac{2}{5} p_1 + \frac{1}{5}, \quad p_1 = \frac{1}{5} p_0 + \frac{1}{5} p_1 + \frac{2}{5}.$$

Dieses LGS mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten löst sich zu

$$p_0 = \frac{4}{7}, \quad p_1 = \frac{9}{14}.$$

Daher ist die gesuchte Gewinnwahrscheinlichkeit = $\frac{4}{7}$.

WT - H 2009

- (e) Es sei t_k die mittlere Spieldauer, vorausgesetzt, dass die Markoffkette im Feld k startet ($k = 0, 1, 2, 3$). Gemäß Skript S.28, 7.10, gilt für $k \notin R$:

$$t_k = 1 + \sum_{j=0}^3 p_{kj} t_j$$

und für $k \in R$ natürlich $t_k = 0$. Daher erhalten wir

$$t_0 = 1 + \frac{1}{5}t_0 + \frac{2}{5}t_1, \quad t_1 = 1 + \frac{1}{5}t_0 + \frac{1}{5}t_1.$$

Die Lösung dieses LGS lautet $t_0 = \frac{15}{7}$, $t_1 = \frac{25}{14}$, sodass die mittlere Spieldauer $\frac{15}{7}$ Züge beträgt.

Lösung 4.

- (a) Es muss gelten: $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$. Also $\int_{-2}^2 ax^2 dx = [a \frac{1}{3} x^3]_{-2}^2 = a \frac{1}{3} (8 + 8) = \frac{16}{3} a = 1$.

Daher $a = \frac{3}{16}$.

- (b) Gemäß Definition: $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. Falls $y < 0$, dann ist also $0 \leq F_Y(y) \leq P(X^2 < 0) = 0$. Falls $y > 4$, dann gilt $1 \geq F_Y(y) \geq P(X^2 \leq 4) = 1$. Falls $y \in [0, 4]$, so gilt

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{2}{3} a \sqrt{y}^3 = \frac{1}{8} y^{3/2}.$$

Insgesamt also

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{8} y^{3/2} & y \in [0, 4] \\ 1 & y > 4. \end{cases}$$

- (c) Da F_Y stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, besitzt Y eine Dichte, die gegeben ist durch $g(y) = F'_Y(y)$ für y dort, wo F_Y stetig differenzierbar (an den sonstigen Stellen setze $g(y)$ beliebig fest). Somit erhält man als eine Dichte

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{16} y^{1/2} & y \in [0, 4] \\ 0 & y \notin [0, 4] \end{cases}$$

- (d) Es gilt

$$P(Y \geq 1 | X \leq 0) = P(X^2 \geq 1, X \leq 0) / P(X \leq 0) = P(X \leq -1) / P(X \leq 0).$$

Wir bestimmen Zähler und Nenner: $P(X \leq -1) = a \int_{-2}^{-1} x^2 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot (8 - 1) = \frac{7}{16}$ und $P(X \leq 0) = a \int_{-2}^0 x^2 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot (8 - 0) = \frac{8}{16}$, und somit

$$P(Y \geq 1 | X \leq 0) = \frac{7}{8}.$$

- (e) Es gilt

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = a \int_{-2}^2 x^3 dx = 0,$$

da der Integrand gerade ist. Ferner gilt

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = a \int_{-2}^2 x^4 dx = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 32 = \frac{12}{5}.$$

Schließlich haben wir $E(Y) = E(X^2) = \frac{12}{5}$.

- (f) Es gilt $P(Y \geq 1, X \geq 1) = P(X \geq 1 \text{ oder } X \leq -1, X \geq 1) = P(X \geq 1) = \frac{7}{16}$,

und $P(Y \geq 1)P(X \geq 1) = P(X \geq 1 \text{ oder } X \leq -1)P(X \geq 1) = \frac{14}{16} \cdot \frac{7}{16}$.

Diese beiden Werte sind verschieden, damit sind X und Y nach Definition nicht stochastisch unabhängig.