WT - H 2010

Karlsruher Institut für Technologie (KIT) — Herbst 2010
Institut für Analysis — 04.10.2010
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Wahrscheinlichkeitstheorie

für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Gegeben sei eine Urne mit 4 roten, 4 schwarzen und 4 weißen Kugeln. Der Urne werden nacheinander drei Kugeln entnommen, in jedem Zug jeweils genau eine Kugel.
Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

$$A_1 = \{\textbf{keine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{rot}\}$$
$$A_2 = \{\textbf{alle} \text{ drei gezogenen Kugeln sind } \textbf{rot}\}$$
$$A_3 = \{\textbf{mindestens eine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{nicht rot}\}$$
$$A_4 = \{\textbf{genau eine} \text{ der drei gezogenen Kugeln ist } \textbf{schwarz}\}$$
$$B = \{\textbf{die erste} \text{ gezogene Kugel ist } \textbf{rot}\}$$
$$C = \{\textbf{die zweite} \text{ gezogene Kugel ist } \textbf{weiß}\}$$

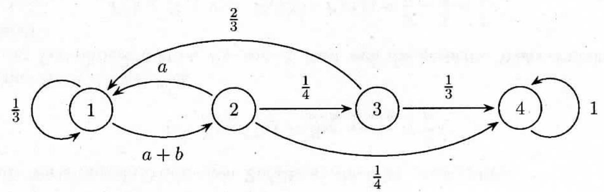
a) Bestimmen Sie $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_3)$ für den Fall, dass die Kugel nach jedem Zug wieder zurück in die Urne gelegt werden.

b) Bestimmen Sie $P(A_1)$, $P(A_2)$ und $P(A_4)$ für den Fall, dass die Ziehungen ohne Zurücklegen der Kugeln erfolgen.

c) Die Ziehungen werden ohne Zurücklegen der Kugeln durchgeführt. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Ereignisse B und C stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2 (7+3=10 Punkte)

a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf der Zustandsmenge $\{1,2,3,4\}$ besitze den Übergangsgraphen



mit zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Ermitteln Sie a und b.

(ii) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

(iii) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2),$$
$$P(X_3 = 3,\, X_2 = 2 \,|\, X_0 = 1),$$
$$P(X_5 = 4 \,|\, X_2 = 2).$$

(iv) Der Anfangszustand der Markoffkette sei $X_0 = 1$. Bestimmen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand.

b) Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment:
Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird ein Würfel geworfen, der auf drei Seiten mit der Ziffer 1, auf zwei Seiten mit der Ziffer 2 und auf einer Seite mit der Ziffer 4 beschriftet ist. Das Experiment endet, sobald zum ersten Mal die Ziffernfolge 24 auftritt.
Geben Sie zur Modellierung dieses Zufallsexperiments durch eine Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zustandsmenge mit weniger als neun Zuständen, den zugehörigen Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an.

Aufgabe 3 **(3+2+2+3=10 Punkte)**

Die stetige Zufallsvariable X habe mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$ die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c|x| & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Bestimmen Sie c und geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $D^2(X)$ von X.

c) Berechnen Sie $P(|X| > \frac{1}{10})$.

d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von $\sqrt{|X|}$.

Aufgabe 4 **(7+3=10 Punkte)**

a) Ein Unternehmen stellt Kugelschreiber her, die jeweils aus einer Schreibmine, einer Metallfeder und einer Kunststoffhülle bestehen. Das Gewicht einer Schreibmine hat den Erwartungswert 2,5 und die Varianz 0,14, das Gewicht der Metallfedern den Erwartungswert 0,5 und die Varianz 0,1, das Gewicht der Kunststoffhüllen den Erwartungswert 10,0 und die Varianz 0,4. Alle drei Gewichte sind voneinander stochastisch unabhängig und normalverteilt.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers zwischen 12,0 und 13,0?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit überschreitet eine Packung mit 25 solcher Kugelschreiber das Gesamtgewicht von 330?

b) Ein fairer Würfel werde N-mal in unabhängiger Folge geworfen, wobei $N \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable X_j bezeichne die im j-ten Wurf erzielte Augenzahl ($j = 1, \ldots, N$). Bestimmen Sie

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \geq 4N\Big).$$

Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt:

$\Phi(0.125) \approx 0.5497, \quad \Phi(0.5) \approx 0.6915, \quad \Phi(0.8) \approx 0.7881, \quad \Phi(0.9) \approx 0.8159, \quad \Phi(1.25) \approx 0.8944.$

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der gezogenen roten Kugeln, Y die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist, ist gleich $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Da die Ziehungen mit Zurücklegen der Kugeln erfolgen, ist die Zufallsvariable X binomialverteilt mit Parametern $p = \frac{1}{3}$ und $N = 3$. Folglich gilt

$$P(A_1) = P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$
$$P(A_2) = P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27},$$
$$P(A_3) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}.$$

b) Da die Ziehungen nun ohne Zurücklegen der Kugeln erfolgen, ist X in diesem Fall hypergeometrisch verteilt mit Parametern $n = 3$ (Anzahl der Ziehungen), $N = 12$ (Anzahl der Kugeln insgesamt) und $M = 4$ (Anzahl der roten Kugeln). Somit ist

$$P(A_1) = P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{14}{55},$$
$$P(A_2) = P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{55}.$$

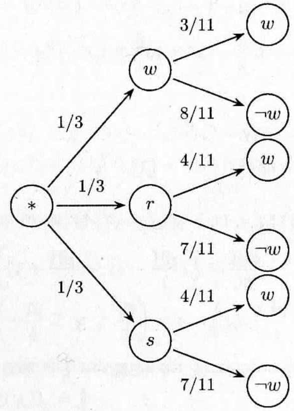
Die Zufallsvariable Y ist ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit denselben Parametern wie X. Hier gilt also

$$P(A_4) = P(Y = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}.$$

c) Die Ereignisse B und C sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(B)\cdot P(C) = P(B \cap C).$$

Bei dem in der Aufgabenstellung beschriebenen Zufallsexperiment handelt es sich um ein mehrstufiges Experiment, das sich auch als Baumdiagramm darstellen lässt. Es soll w, r, s und $\neg w$ bedeuten, dass eine weiße, rote, schwarze bzw. nicht weiße Kugel gezogen wurde.



Hieraus lassen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ablesen. Die Wahrscheinlichkeiten auf den einzelnen Pfaden werden dabei multipliziert. Man erhält

$$P(B) = \frac{1}{3}$$
$$P(C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} = \frac{1}{3}$$
$$P(B \cap C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{11} = \frac{4}{33}.$$

Da $P(B \cap C) = \frac{4}{33} \neq \frac{1}{9} = P(B)\cdot P(C)$ ist, sind die beiden Ereignisse B und C nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2

a) **(i)** Da die Zeilensummen der Übergangsmatrix P gerade 1 ergeben müssen, muss $a = \frac{1}{2}$ und $a + b = \frac{2}{3}$ und somit $b = \frac{1}{6}$ gelten.

(ii) Die zum gegebenen Übergangsgraphen gehörige Übergangsmatrix P lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Anhand des Übergangsgraphen erkennt man

$$P(X_2 = 1 \,|\, X_0 = 2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(X_3 = 3, X_2 = 2 \,|\, X_0 = 1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{18}$$
$$P(X_5 = 4 \,|\, X_2 = 2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 = \frac{5}{12}.$$

WT - H 2010

iv) Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um vom Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{4\}$ zu gelangen ($i = 1,2,3,4$). Für jeden inneren Zustand $i = 1,2,3$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^{4} p_{ij}\, m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnen. In der vorliegenden Situation gilt

$$m_1 = 1 + p_{11}\, m_1 + p_{12}\, m_2 + p_{13}\, m_3 = 1 + \frac{1}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_2 \iff m_1 = \frac{3}{2} + m_2 \quad (1)$$

$$m_2 = 1 + p_{21}\, m_1 + p_{22}\, m_2 + p_{23}\, m_3 = 1 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{4} m_3 \quad (2)$$

$$m_3 = 1 + p_{31}\, m_1 + p_{32}\, m_2 + p_{33}\, m_3 = 1 + \frac{2}{3} m_1 \quad (3)$$

$$m_4 = 0.$$

Da der Anfangszustand 1 ist, muss m_1 bestimmt werden.
Setzt man die Gleichung (3) in (2) ein, so erhält man $m_2 = \frac{5}{4} + \frac{2}{3} m_1$. Setzt man dieses wiederum in Gleichung (1) ein, so folgt $m_1 = \frac{33}{4}$. Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also etwa acht Zeitschritte.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne die Zufallsvariable X_n die im $n-1$-ten und n-ten Wurf geworfene Ziffernfolge aus der Menge $\{11, 12, 14, 21, 22, 24, 41, 42, 44\}$. Mit $*$ werde der Startzustand X_0 bezeichnet. Verwendet man die Zuordnung

Ziffernfolge	*	11	12	14	21	22	24	41	42	44
Zustand	0	1	2	1	1	2	3	1	2	1

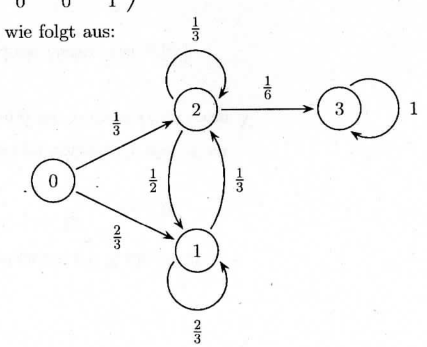
so lässt sich das Zufallsexperiment als Markoffkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Zustandsmenge $\{0,1,2,3\}$ modellieren. Hierbei gelten also die Entsprechungen

$0 \mathrel{\widehat{=}}$ "Startzustand",
$1 \mathrel{\widehat{=}}$ "letzte gewürfelte Ziffer ist 1 oder 4",
$2 \mathrel{\widehat{=}}$ "letzte gewürfelte Ziffer ist 2",
$3 \mathrel{\widehat{=}}$ "Auftreten der Ziffernfolge 24".

Da der Folgezustand nur vom gegenwärtigen Zustand (d.h. der aktuellen Ziffernfolge) und nicht von der Vorgeschichte (d.h. auf welche Weise die Ziffernfolge zustande kam) abhängt, handelt es sich um eine Markoffkette.
Die zugehörige Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der zugehörige Übergangsgraph sieht wie folgt aus:



WT - H 2010

Aufgabe 3

a) Damit f die Dichte einer Zufallsvariablen ist, muss gelten:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_{-1}^{0} (-x)\,dx + c\int_{0}^{1} x\,dx = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = c.$$

Dies ist genau für $c = 1$ der Fall.
Die Verteilungsfunktion F_X von X berechnet sich folgendermaßen: Für $x < -1$ ist $F_X(x) = P(X \le x) = 0$ und für $x \ge 1$ ist $F_X(x) = P(X \le x) = 1$. Ist $x \in [-1, 0)$, so gilt

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{x} (-x)\,dx = \frac{1}{2}(1 - x^2),$$

und ist $x \in [0,1)$, so gilt

$$F_X(x) = \int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{x} x\,dx = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

Also ist
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{1}{2}(1 - x^2) & , x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2}(1 + x^2) & , x \in [0, 1) \\ 1 & , x \ge 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Da die Funktion $x \mapsto x\,|x|$ ungerade ist, gilt für den Erwartungswert von X

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,|x|\,dx = 0.$$

Ferner ist
$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{2}$$

und somit $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2}$.

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion berechnen. Es ist

$$P\left(|X| > \frac{1}{10}\right) = 1 - P\left(-\frac{1}{10} \le X \le \frac{1}{10}\right) = 1 - \left(F_X\left(\frac{1}{10}\right) - F_X\left(-\frac{1}{10}\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left((1 + \frac{1}{10^2}) - (1 - \frac{1}{10^2})\right) = \frac{99}{100}.$$

d) Wir setzen $Y := \sqrt{|X|}$. Ist $x < 0$, so ist $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\sqrt{|X|} \le x) = 0$. Für $x \ge 0$ gilt

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(\sqrt{|X|} \le x) = P(|X| \le x^2)$$
$$= P(-x^2 \le X \le x^2) = F_X(x^2) - F_X(-x^2).$$

Hieraus folgt für $x \in [0,1)$

$$F_Y(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2) = \frac{1}{2}(1 + x^4) - \frac{1}{2}(1 - x^4) = x^4$$

und für $x \ge 1$
$$F_Y(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2) = 1 - 0 = 1.$$

Insgesamt ergibt sich
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^4 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Funktion F_Y ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ stetig differenzierbar mit

$$F_Y'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ 4x^3, & x \in (0,1). \end{cases}$$

WT - H 2010

Setzt man $f_Y(x) := F_Y'(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $f_Y(0) := f_Y(1) := 0$, so ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung f_Y eine Dichte von Y, d.h. es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(u)\,du.$$

Aufgabe 4

a) **(i)** Die Zufallsvariablen Y_S, Y_M, Y_K sollen das Gewicht einer Schreibmine, einer Metallfeder und einer Kunststoffhülle angeben. Nach Aufgabenstellung sind diese Zufallsvariablen normalverteilt mit

$$Y_S \sim N(2.5, 0.14), \qquad Y_M \sim N(0.5, 0.1), \qquad Y_K \sim N(10.0, 0.4).$$

Das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers werde durch die Zufallsvariable X beschrieben, es ergibt sich als Summe der drei Einzelgewichte. Da Y_S, Y_M, Y_K voneinander stochastisch unabhängig sind, ist auch $X = Y_S + Y_M + Y_K$ wieder normalverteilt mit

$$\mu := E(X) = E(Y_S) + E(Y_M) + E(Y_K) = 2.5 + 0.5 + 10.0 = 13.0,$$
$$\sigma^2 := D^2(X) = D^2(Y_S) + D^2(Y_M) + D^2(Y_K) = 0.14 + 0.1 + 0.4 = 0.64.$$

D.h. die Zufallsvariable $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ist $N(0,1)$-verteilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich somit durch

$$\begin{aligned}
P(12.0 \le X \le 13.0) &= P\left(\frac{12-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{13-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{12-13}{0.8} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{13-13}{0.8}\right) = P\left(-1.25 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 0\right) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1.25) = \Phi(0) - (1 - \Phi(1.25)) \\
&\approx 0.5 - (1 - 0.8944) = 0.3944.
\end{aligned}$$

(ii) Bezeichnet für $j \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_j das Gesamtgewicht eines Kugelschreibers, so ergibt sich das Gewicht einer Packung mit 25 solcher Kugelschreiber als

$$S := \sum_{j=1}^{25} X_j.$$

Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_j)_j$ ist auch S wieder normalverteilt. Mit Hilfe von (i) ergibt sich

$$\mu_S := E(S) = \sum_{j=1}^{25} E(X_j) = 25 \cdot 13 = 325,$$
$$\sigma_S^2 := D^2(S) = \sum_{j=1}^{25} D^2(X_j) = 25 \cdot 0.64 = 16.$$

Die Zufallsvariable $\frac{S-\mu_S}{\sigma_S}$ ist also $N(0,1)$ verteilt und es gilt

$$\begin{aligned}
P(S > 330) &= P\left(\frac{S-325}{4} > \frac{330-325}{4}\right) = P\left(\frac{S-325}{4} > 1.25\right) \\
&= 1 - \Phi(1.25) \approx 1 - 0.8944 = 0.1056.
\end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $E(X_j) = 3.5$ für $j = 1, 2, \ldots, N$. Nach dem Chintschinschen Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\begin{aligned}
0 &\le P\Big(\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4N\Big) = P\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4\Big) \\
&= 1 - P\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3.5 < 0.5\Big) \le 1 - P\Big(\Big|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j - 3.5\Big| < 0.5\Big) \\
&\longrightarrow 1 - 1 = 0 \qquad \text{für } N \to \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist $\lim_{N\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{N} X_j \ge 4N\right) = 0.$