Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 1

In Ihrer Speisekammer befindet sich ein sogenannter *Fränkischer Mischkasten*. Dabei handelt es sich um einen Kasten erlesener Biere von unterschiedlichen fränkischen Brauereien. Der Kasten enthalte insgesamt 20 verschiedene Biere: von fünf Brauereien jeweils ein *Pils*, ein *Helles*, ein *Lager* und ein *Schwarzbier*.
Die Biere sind in gleichen Flaschen abgefüllt und zufällig im Kasten angeordnet. Ihre Speisekammer ist nur sehr spärlich beleuchtet, so dass Sie sich für ihre abendliche Verköstigung fragen, wie groß wohl die Wahrscheinlichkeit ist,

a) dass, bei 4 aus dem vollen Kasten zufällig gezogenen Bieren, mindestens drei von der selben Brauerei stammen?

b) mit einem Griff drei verschiedene Sorten aus dem vollen Kasten zu holen?

c) die vier Sorten jeder Brauerei zufällig in jeweils einer Reihe im Kasten stehen?

Aufgabe 2

An einer Bahnstation steigen drei Personen in einen aus sechs Wagen bestehenden Zug ein. Jede Person wählt den Wagen zufällig und unabhängig aus.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei Personen in verschiedene Wagen einsteigen.

Der Zug ist verspätet. Eine der eingestiegenen Personen überlegt sich, ob ihr Anschlusszug wohl noch zu erreichen ist. Laut Reiseplan sind fünf Minuten Zeit umzusteigen. Für den Weg zum nächsten Bahnsteig wird eine Minute benötigt. Die zufällige Verspätung in Minuten, mit der der Zug den Bahnhof verlässt, folge einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda_1 = 0{,}3\,{}^1\!/\mathrm{min}$.
Die Verspätung verändert sich auf der Fahrt nicht.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht die Person ihren Anschlusszug, wenn dieser pünktlich abfährt?

Aufgabe 3

Ein Passagier-Flugzeug von Typ *Airbus A380* der *Lufthansa* hat 420 Sitzplätze in der Economy-Klasse. Obwohl nie mehr Passagiere mitgenommen werden können als Sitzplätze verfügbar sind, werden üblicherweise zu viele Tickets ausgegeben.
Eine solche Überbuchung eines Fluges wird im Folgenden durch das Verhältnis der zu viel ausgegeben Tickets zu tatsächlich vorhanden Sitzplätzen beschrieben. Es wird angenommen, dass Reisende mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 zu ihrem Flug erscheinen.

a) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable „Anzahl erscheinender Passagiere in der Economy-Klasse" in Abhängigkeit der Überbuchung u an. Es wird angenommen, dass das Verhalten der Passagiere voneinander unabhängig ist.

b) Durch welche Verteilung kann die Funktion aus a) angenähert werden, so dass eine Berechnung der folgenden Teilaufgabe möglich ist? Geben die Parameter dieser Verteilung an. Hinweis: Satz von Moivre-Laplace.

c) Für einen bestimmten Flug wird mit einer Überbuchung von 7,69% gearbeitet. Wie viele Tickets wurden ausgegeben? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten alle erscheinenden Passagiere einen Platz?

Aufgabe 4

X ist eine Zufallsvariable, die nur positive Werte annimmt. Sie besitzt den Erwartungswert $E(X)$ mit $|E(X)| < \infty$.

a) Zeigen sie, dass mit jedem $\lambda > 1$ die *Markoffsche Ungleichung*

$$P(X > \lambda E(X)) \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \text{gilt.}$$

b) Warum ist die *Markoffsche Ungleichung* für $0 < \lambda \leq 1$ sowieso erfüllt?

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} k(x-2)(b-x), & \text{für } 2 < x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den Konstanten $k \in \mathbb{R}, k > 0$ und $b \in \mathbb{R}, b > 2$.

a) Skizzieren Sie qualitativ den Graphen der Funktionen und begründen Sie damit, dass $f_X(x)$ bei geeigneter Wahl von k eine Dichtefunktion darstellt. Bestimmen Sie k für den Fall $b = 4$.

Ermitteln Sie für $b = 4$

b) die Verteilungsfunktion $F_X(x)$,

c) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(3 < X \leq 5 | X > 2.5)$

d) sowie den Erwartungswert $E(X)$. Für welches b ergibt sich $E(X) = 4$?

Aufgabe 6

Es wird ein diskreter, stochastischer Prozess betrachtet, der drei verschiedene Zustände zyklisch durchläuft. Angefangen im ersten Zustand erfolgt der Übergang in den jeweils nächsten mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%, 70% beziehungsweise 60%. Der Zyklus wird nur in einer Richtung durchlaufen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind zeitinvariant und hängen nur vom momentanen Zustand ab.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix $\overline{P}$ an.

b) Im n-ten Zeitschritt gilt für die Zustandsverteilung $\vec{p}_n^{\,T} = (0{,}7;\ 0{,}1;\ 0{,}2)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prozess sich zwei Schritte später **nicht** im zweiten Zustand befindet?

Lösung

Aufgabe 1

a) Die Zufallsvariable X „Anzahl Biere von einer bestimmten Brauerei" ist hypergeometrisch verteilt; für die Parameter gilt $N = 20$, $M = 4$ und $n = 4$.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Zu berechnen ist

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}0134.$$

Da es aber egal ist, von welcher Brauerei die Biere sind, gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_a = 5\,P(X \geq 3) = 0{,}0671.$$

b) $$P_b = 4 \cdot \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{20}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18} = 0{,}4389$$

c) Alle Biere einer Brauerei werden als gleich angesehen. Im Kasten sind also 5 verschiedene Flaschen, jede vier mal. Damit gibt es $\left|\Pi_{20}^{(4,4,4,4,4)}\right|$ Möglichkeiten die Flaschen in der Kiste anzuordnen.

Es ist egal in welcher Reihe die Biere einer Brauerei stehen; daher gibt es 5! Möglichkeiten die Biere den Reihen zuzuordnen.

$$P_c = \frac{5!}{\left|\Pi_{20}^{(4,4,4,4,4)}\right|} = 3{,}9275 \cdot 10^{-10}$$

Aufgabe 2

a) r Personen können auf n^r Arten zufällig in n Wagen einsteigen. Es gilt also für die Gesamtzahl der Elementarereignisse: n^r.

b) Nun sei $r \leq n$ und A das Ereignis, dass r Personen in verschiedene Wagen einsteigen. Dann hat die erste Person n, die zweite $(n-1)$, ... und die r-te $(n-r+1)$ Wagen zur Auswahl. Es folgt:

$$P(A) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r}$$

Für $r = 3$ und $n = 6$ heißt das

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$$

Zufallsvariable V_1 „Verspätung des ersten Zuges in Minuten"

$$F_{V_1}(v_1) = 1 - e^{-\lambda_1 v_1}$$

$$P(V_1 + 1 \leq 5) = F_{V_1}(4) = 0{,}6988$$

Aufgabe 3

a) Bei einer Überbuchung von u werden $N = \lfloor u S_{\text{econ}} \rceil$ Tickets mit $S_{\text{econ}} = 420$ ausgegeben. Damit liegt ein Bernoullisches Versuchsschema mit den Parametern N und $p = 0{,}9$ vor. Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_X(x) = \sum_{K \leq x} \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}.$$

b) Durch eine Normalverteilung $F_X(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit den Parametern $\mu = pN$ und $\sigma^2 = p(1-p)N$.

c) $u = 0{,}0769 \Rightarrow N = 452$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(X \leq S_{\text{econ}}) = \Phi\left(\frac{0{,}5 + S_{\text{econ}} - pN}{\sqrt{p(1-p)N}}\right) = \Phi(2{,}15) = 98{,}41\%$$

Aufgabe 4

a) Es gilt

$$m = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx.$$

Daraus folgt

$$m \geq \int_{\lambda m}^\infty x f(x) dx \geq \int_{\lambda m}^\infty \lambda m f(x) dx \geq \lambda m \int_{\lambda m}^\infty f(x) dx$$

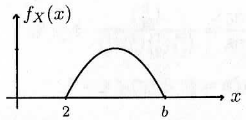
$$= \lambda m (1 - F(\lambda m)) = \lambda m (1 - P(X \leq \lambda m)) = \lambda m P(X > \lambda m)$$

$$\Leftrightarrow P(X > \lambda E(X)) \leq \frac{1}{\lambda}$$

b) Für $0 < \lambda \leq 1$ ist $1/\lambda > 1$ und damit ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt.

Aufgabe 5

a)



Es gilt $\forall x : f_X(x) \geq 0$, da in $(2, b]$ bei die Faktoren $(x-2)$ und $(b-x)$ stets positiv sind. In diesem Intervall stellt hat die Funktion den Verlauf einer nach unten geöffneten Parabel dar und schließt mit der x-Achse eine endliche, nicht-verschwindende Fläche ein. Diese kann mit dem Parameter k auf eins normiert werden, womit $f_X(x)$ eine Dichtefunktion darstellt.

Für $b = 4$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathrm{d}x = k \int_2^4 -x^2 + 6x - 8 \,\mathrm{d}x = k \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x\right]_2^4 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

b)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) \mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5, & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ 1, & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

c)

$$P(3 < X \leq 5 | X > 2{,}5) = \frac{P(3 < X \leq 5)}{P(X > 2{,}5)} = \frac{F_X(5) - F_X(3)}{1 - F_X(2{,}5)} = 0{,}5926$$

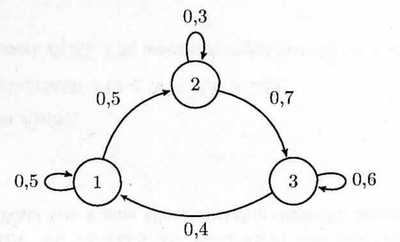
d)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = k \int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 8x \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x\right]_2^4 = 3$$

Die Dichtefunktion ist für alle b symmetrisch um $x_0 = 1 + b/2$. Der Erwartungswert fällt mit der Symmetrieachse zusammen und es ergibt sich für $b = 6$ zu $E(X) = 4$

Aufgabe 6

a) Übergangsgraph:



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit sei P_b. Es gilt:

b)

$$\vec{p}_{n+2}^{\,T} = \vec{p}_n^{\,T} \cdot \overline{P}^2 = (0{,}3250;\ 0{,}3490;\ 0{,}3260)$$

$$P_b = 0{,}3250 + 0{,}3260 = 0{,}6510$$

Alternativ direkt aus dem Übergangraphen:

$$P_b = 1 - (p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22})0{,}7 + (p_{22}p_{22})0{,}1 + (p_{31}p_{12})0{,}2 = 0{,}6510$$