Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Friedrich K. Jondral

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

12.09.2013

Musterlösung

Hinweise zur Prüfung

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an. Verwenden Sie bitte bei der Bearbeitung keine rote Farbe und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Beachten Sie besonders: **Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein**, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann. Schreiben Sie leserlich. **Schalten Sie Ihr Handy für die Dauer der Prüfung aus**.

Hilfsmittel

Mit Ausnahme von programmierbaren Rechnern sind alle Hilfsmittel erlaubt.

Abzugeben

Es sind nur Ihre sortiert in das Doppelblatt eingelegten Ausarbeitungen abzugeben.

Nicht abzugeben

Das Aufgabenblatt sowie Ihr Konzeptpapier sind nicht abzugeben.

Ergebnis

Das Ergebnis Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **17.10.2013** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG).

Klausureinsicht

Die Klausureinsicht ist am **24.10.2013** von **15:00 - 17:00 Uhr** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG).

Aufgabe 1

Betrachtet wird ein Würfelspiel, bei dem ein Tetraeder, ein Hexaeder und ein Oktaeder gleichzeitig geworfen werden. Die Würfel sind symmetrisch und ihre Seiten mit Eins beginnend nummeriert.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an.

b) Berechnen die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $A = \{$alle drei Polyeder zeigen die gleiche Zahl$\}$ und $B = \{$genau zwei der Polyeder zeigen eine Vier$\}$.

c) Für den Einsatz von 60 Cent darf ein Spieler die drei Polyeder einmal werfen. Die Anzahl der gewürfelten Einsen erhält er in Euro ausbezahlt. Welchen Gewinn kann der Anbieter des Würfelspiels bei 100 Würfen erwarten?

d) Die Augensumme ist die Summe der drei gewürfelten Zahlen. Jemand behauptet, dass die Augensumme 6 häufiger auftritt als die Augensumme 15. Überprüfen Sie diese Behauptung.

a) Ergebnisse als Tupel der drei Augenzahlen:

$$\Omega = \Big\{(t, h, o);\ t \in \{1, 2, 3, 4\}, h \in \{1, 2, ..., 6\}, o \in \{1, 2, ..., 8\}\Big\}$$

b) Ereignis A:

Da der Tetraeder nur Zahlen bis Vier trägt, spielen größere Augenzahlen keine Rolle. Es sei $A_i = \{$alle drei Polyeder zeigen die Zahl $i\}$ mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$P(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{192} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 4 \cdot P(A_i) = \frac{1}{48} \approx 2{,}08\%$$

Ereignis B:

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{64} = 7{,}81\%$$

c) Die Augenzahlen der Würfel werden durch die Zufallsvariablen T, H und O beschrieben. Diese sind voneinander unabhängig. Die Beiträge der einzelnen Würfel zum Auszahlungsbetrag R können daher addiert werden:

$$R = P(T=1) \cdot 1€ + P(H=1) \cdot 1€ + P(O=1) \cdot 1€ = \frac{13}{24} \cdot 1€ = 0{,}54167€$$

Für den Anbieter ergibt sich ein mittlerer Gewinn von 0,05833€ pro Spiel und damit 5,83€ für 100 Spiele.

d) Die Augensumme 6 kann nur aus Permutation der Ereignisse $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 4)$ und $(2, 2, 2)$ gebildet werden. Davon gibt es 6 bzw. 3 bzw. 1 verschiedene, also insgesamt 10 gleichwahrscheinliche Ereignisse.

Zur Bildung der Augensumme 15 müssen für $t = 1$ die anderen beiden Würfen die jeweils maximale Augenzahl zeigen, also $(1, 6, 8)$, vom dem es nur eine gültige Permutation gibt. Für $t = 2$ ergeben sich mit $(2, 5, 8)$ und $(2, 6, 7)$ zwei gültige Ereignisse. Analog dazu ergeben es für $t = 3$ drei und für $t = 4$ vier gültige Ereignisse. Insgesamt kann die Augenzahl 15 durch $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ gleichwahrscheinliche Ereignisse gebildet werden.

Die Augensummen 6 und 15 treten gleich häufig auf. Die Behauptung ist falsch.

Aufgabe 2

Eine Population gelber Zeichentrickfiguren, die *Minions*, werde nach den Merkmalen Körpergröße und Augenanzahl unterschieden: 80% haben zwei Augen, die anderen nur eins. Von den zweiäugigen werden 20% als groß angesehen, 70% als mittelgroß und der Rest als klein. Von den einäugigen Minions sind nur 5% groß, 60% mittelgroß und der Rest klein.

a) Berechnen Sie den Anteil der jeweiligen Körpergrößen an der gesamten Minion-Population.

b) Für eine besondere Aufgabe wird eines der Minions zufällig ausgewählt. Die kleinen Minions sind für die Aufgabe ungeeignet und werden vorher von der Auswahl ausgeschlossen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das ausgewählte Minion einäugig?

c) Erklären die Aussage „Disjunkte Ereignisse sind im höchsten Maße abhängig“ am Beispiel der Merkmale eines zufälligen Minions.

d) Die Augenanzahl-Verteilung in der Minion-Population soll überprüft werden. Dazu werden die Augenanzahlen von 500 zufällig ausgewählten Minions ausgewertet. Der Test gilt als gescheitert, wenn die beobachteten Häufigkeiten um mehr als 20 von den erwarteten abweichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheitert der Test, obwohl die Verteilung richtig ist?

Hinweis: Sie benötigen eine Näherung auf Basis der Gauß-Verteilung (Begründung!).

a) Ereignisse: G = großes Minion, M = mittelgroßes Minion, K = kleines Minion und A_i = Minion mit $i = 1, 2$ Augen.

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|A_1)P(A_1) + P(G|A_2)P(A_2) = 0{,}17 \\ P(M) &= P(M|A_1)P(A_1) + P(M|A_2)P(A_2) = 0{,}68 \\ P(K) &= P(K|A_1)P(A_1) + P(K|A_2)P(A_2) = 0{,}15 \end{aligned}$$

b) Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A_1|\bar{K}) = \frac{P(\bar{K}|A_1)P(A_1)}{P(\bar{K})} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}2}{0{,}85} = 15{,}3\%$$

c) Die disjunkten Ereignisse A_1 und A_2 haben beide eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit. Bei Unabhängigkeit müsste $P(A_1|A_2) = P(A_1)$ gelten. Da aber das Auftreten von A_2 das Ergebnis $A_1 = \bar{A}_2$ ausschließt, gilt hier $P(A_1|A_2) = P(A_1A_2)/P(A_2) = 0$. Die beiden Ereignisse sind voneinander abhängig. Dies gilt auch für Ereignisdisjunktionen mit mehr als zwei Elementen.

d) Die binomialverteilte ZV X mit den Parametern $p = P(A_1) = 0{,}2$ und $N = 500$ beschreibe die beobachtete absolute Häufigkeit der Minions mit einem Auge unter der Annahme, dass die Verteilung richtig ist. Als Näherung wird hier, gemäß dem Satz von de Moivre-Laplace, eine normalverteilte ZV $X_N \sim \mathcal{N}(pN, Np(1-p))$ verwendet. Wegen $Np(1-p) = 80{,}0 \geq 9$ ist diese gültig. Damit folgt:

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P(pN - 5 \leq X \leq pN + 5) \\ &\approx 2 - 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{pN(1-p)}}\right) = 2 - 2 \cdot \Phi(2{,}24) = 2{,}53\% \end{aligned}$$

Wird die Anzahl der zweiäugigen Minions betrachtet ergibt sich dasselbe Ergebnis.

Aufgabe 3

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1 \ \ X_2)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\vec{k}^T \vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi/\alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

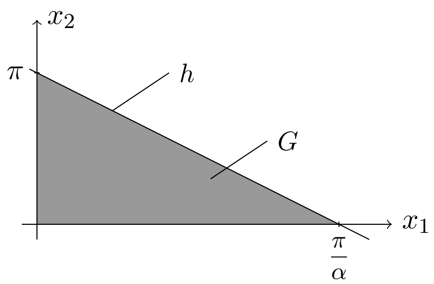
Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\alpha \quad 1)^T$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizzieren Sie G und berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$.

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten von $\vec{X}$ nicht unabhängig sind.

c) Berechnen Sie für für $\alpha = 1$ die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$.

a) Das Gebiet G liegt im ersten Quadranten der durch x_1 und x_2 aufgespannten Ebene.
$h\colon \ x_1 = t\pi/\alpha \ \wedge \ x_2 = \pi - t\pi \ \Rightarrow \ x_2 = \pi - \alpha x_1$



Für die $F_{\vec{X}}(\vec{x}) = F_{\vec{X}}(x_1, x_2)$ ergibt sich für $\vec{x} \in G$:

$$\begin{aligned} F_{\vec{X}}(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\alpha u_1 + u_2) \, \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_1} \Big[-\cos(\alpha u_1 + u_2) \Big]_{u_2=0}^{x_2} \mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_1} \cos(\alpha u_1) - \cos(\alpha u_1 + x_2) \, \mathrm{d}u_1 \\ &= \frac{1}{\pi} \Big[\sin(\alpha u_1) - \sin(\alpha u_1 + x_2) \Big]_{u_1=0}^{x_1} \\ &= \frac{1}{\pi} \Big[\sin(\alpha x_1) + \sin(x_2) - \sin(\alpha x_1 + x_2) \Big]. \end{aligned}$$

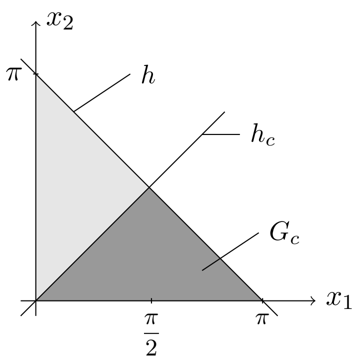
b) Für Unabhängigkeit müsste $f_{\vec{X}}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ gelten:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\pi-\alpha x_1} \sin(\alpha x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\alpha}{\pi}\Big[-\cos(\alpha x_1 + x_2)\Big]_{x_2=0}^{\pi-\alpha x_1} \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\Big[\cos(\alpha x_1) + 1\Big] \quad \text{für } x_1 \in [0, \pi/\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi-x_2}{\alpha}} \sin(\alpha x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(\alpha x_1 + x_2)\Big]_{x_1=0}^{\frac{\pi-x_2}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\cos(x_2) + 1\Big] \quad \text{für } x_2 \in [0, \pi] \end{aligned}$$

wegen $f_{X_1}(0) f_{X_2}(0) = 4\alpha\pi^{-2} \neq f_{\vec{X}}(0,0) = 0$ sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

c) Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit muss die Dichte über das Gebiet $G_c \subset G$ integriert werden. G_c wird durch $h_c\colon x_2 = x_1$ nach oben begrenzt.



Für $\alpha = 1$ sind x_1 und x_2 in $f_{\vec{X}}(x_1,x_2)$ vertauschbar, dass heißt die Funktion ist um die erste Winkelhalbierende symmetrisch. Damit fällt genau die Hälfte der Wahrscheinlichkeitsmasse in G_c. $P(X_2 < X_1) = 0{,}5$.

Alternativ kann die Lösung über folgendes Integral bestimmt werden:

$$P(X_2 < X_1) = \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{x_1} f_{\vec{X}}(x_1,x_2)\big|_{\alpha=1}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \int\limits_0^{\pi-x_1} f_{\vec{X}}(x_1,x_2)\big|_{\alpha=1}\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

Aufgabe 4

Für die Weite w eines waagerechten Wurfs mit der Geschwindigkeit $v > 0$ von einer Höhe $h > 0$ gilt $w = \gamma(h) = \sqrt{2hv^2/g} > 0$, wobei g eine Konstante ist.

a) Die Höhe H sei zufällig und gleichverteilt im Intervall $[2; 8)$. Berechnen Sie die resultierende Dichte der Wurfweite $f_W(w)$.

b) Berechnen Sie die mittlere Wurfweite und die Varianz von W.

c) Zeigen Sie durch direkte Berechnung, dass $E(W) = E(\gamma(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(h) f_H(h) \mathrm{d}h$ und $E(W) \neq \gamma(E(H))$ gelten und geben Sie für beide Aussagen eine Erklärung an.

a) Es gilt $W = \gamma(H) = \sqrt{\frac{2v^2}{g} H}$ mit der reellen Wurzel $h_1 = \frac{g}{2v^2} w^2$:

$$f_W(w) = \frac{f_H(h_1)}{|\gamma'(h_1)|} = \frac{gw}{6v^2} \cdot f_H\left(\frac{gw^2}{2v^2}\right) \qquad \text{mit } \gamma'(h) = \frac{v}{\sqrt{2gh}}$$

Aus der gegebenen Dichte

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } 2 \leq h < 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich mit $w_1 = \gamma(2) = \frac{2v}{\sqrt{g}}$ und $w_2 = \gamma(8) = \frac{4v}{\sqrt{g}}$

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{gw}{6v^2} & \text{für } w_1 \leq w < w_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

b) Die mittlere Wurfweite ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w) \, \mathrm{d}w = \int_{w_1}^{w_2} \frac{gw^2}{6v^2} \, \mathrm{d}w = \frac{g}{6v^2} \left[\frac{1}{3} w^3\right]_{w=w_1}^{w_2} \\ &= \frac{v}{18\sqrt{g}} \left[4^3 - 2^3\right] = \frac{28v}{9\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Die Varianz berechnet sich gemäß:

$$E(W^2) = \int_{w_1}^{w_2} \frac{gw^3}{6v^2} \, \mathrm{d}w = \frac{g}{6v^2} \left[\frac{1}{4} w^4\right]_{w=w_1}^{w_2} = \frac{v^2}{24g} \left[4^4 - 2^4\right] = \frac{10v^2}{g}$$

$$\operatorname{var}(W) = E(W^2) - E^2(W) = \frac{10v^2}{g} - \frac{784v^2}{81g} = \frac{26v^2}{81g}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} E(\gamma(H)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(h) f_H(h) \, \mathrm{d}h = \int_{2}^{8} \sqrt{\frac{2v^2 h}{g}} \cdot \frac{1}{6} \, \mathrm{d}h = \frac{v}{6}\sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}}\right]_{h=2}^{8} \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}} v}{18\sqrt{g}} \left[8^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{28v}{9\sqrt{g}} = E(W) \end{aligned}$$

und

$$\gamma(E(H)) = \sqrt{\frac{2v^2}{g}E(H)} = \frac{\sqrt{10}v}{\sqrt{g}} \neq E(W).$$

Der Erwartungswertoperator ist linear. Da $\gamma(h)$ eine nichtlineare Abbildung ist, können diese beiden Operationen nicht einfach vertauscht werden. $E(\gamma(H)) = E(W)$, da bei der Erwartungswertbildung von $\gamma(H)$ ein mit der Dichte $f_H(h)$ gewichtetes Mittel aller möglichen Wurfweiten $w = \gamma(h)$ gebildet wird.

Aufgabe 5

Die Position eines Objekts entlang der reellen s-Achse wird durch den stochastischen Ortsprozess $S(t)$ beschrieben. Mit $v \in \mathbb{R}, v > 0$ gilt für dessen Dichte

$$f_{S(t)}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s^2}{t^2} + \frac{s}{t}v - \frac{1}{2}v^2\right).$$

a) Welche Werte darf t annehmen, damit $f_{S(t)}(s,t)$ die Eigenschaften einer Dichte erfüllt? Ist der Prozess stationär? Begründen Sie ihre Aussagen.

b) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von $S(t)$ an. Beschreiben Sie damit qualitativ den Einfluss der Parameter t und v auf die Position des Objekts.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Objekt mit $v = 54$ bei $t = 2{,}1$ weiter als $s_1 = 111$ auf der positiven Halbachse vom Ursprung entfernt?

d) Geben Sie ein endliches Intervall $I(t)$ an, in dem sich das Objekt mit $v = 30$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 aufhält.

---

a) Man erkennt, dass $S(t)$ aus $\mathcal{N}(vt; t^2)$ ist, somit ist gesichert, dass die Fläche unter $f_{S(t)}(s,t)$ eins ist. Außerdem darf die Dichtefunktion nur nicht-negative Werte annehmen; dies ist wegen $e^x > 0\ \forall x$ für $t > 0$ gesichert. Der Prozess ist nicht stationär, da seine Dichtefunktion von der Zeit t abhängt.

b) Gemäß Aufgabenteil a) handelt es sich um eine Normalverteilung mit den Parametern $E(S(t)) = tv$ und $\mathrm{var}(S(t)) = t^2$. Die Wahrscheinlichkeitsmasse wird mit wachsendem t für $v > 0$ nach rechts verschoben und gleichzeitig entlang der s-Achse gestreckt. (Anmerkung: Die Position des Objekts ergibt sich aus einer deterministischen gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit v und einer additiven stochastischen Komponente, die mit der Zeit t zunimmt.)

c) $S_c = S(t = 2{,}1)|_{v=54} \sim \mathcal{N}(113{,}4, 4{,}41)$.

$$P(S_c > s_1) = 1 - \phi\left(\frac{111 - 113{,}4}{2{,}1}\right) = \phi(1{,}143) = 87{,}34\%$$

d) Das Intervall sei symmetrisch um $E(S(t))|_{v=30} = 30t$: $I(t) = [30t - s_r; 30t + s_r]$.

$$P\Big(S(t)|_{v=30} \in I(t)\Big) = \phi\left(\frac{s_r}{t}\right) - \phi\left(-\frac{s_r}{t}\right) = 2\phi\left(\frac{s_r}{t}\right) - 1 \overset{!}{=} 0{,}9$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{s_r}{t}\right) \overset{!}{=} 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad s_r = 1{,}64t$$

Damit gilt $I(t) = \big[28{,}36t;\ 31{,}64t\big]$. Andere Lösungen sind auch möglich.

Aufgabe 6

Für eine binäre Übertragung werden die Eigenschaften des Übertragungskanals mit Hilfe eines Markoff-Modells beschrieben. Der Kanal hat eine Tiefpasscharakteristik, so dass am Empfänger jedes Bit von den beiden vorhergehenden beeinflusst wird. Diese bilden die Zustände des Modells.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des beschriebenen Kanalmodells. Verwenden Sie für die Nummerierung der Zustände eine binäre Darstellung und gehen Sie zunächst davon aus, dass alle Übergänge gleichwahrscheinlich sind.

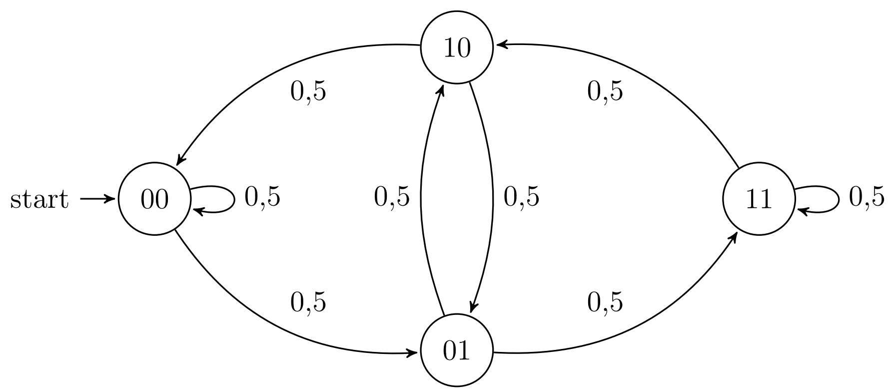
Im Folgenden gilt: Befindet sich genau eine binäre Eins im Gedächtnis des Kanals, bleiben die Übergangswahrscheinlichkeiten unverändert; bei zwei binären Einsen (Nullen) steigt die Wahrscheinlichkeit für eine weitere Eins (Null) auf 0,75.

b) Geben Sie die resultierende Übergangsmatrix an.

c) Der Kanal sei gleichverteilt in einem der Zustände mit genau einer binären Eins im Gedächtnis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nach zwei Übergängen weiterhin genau eine binäre Eins im Gedächtnis des Kanals.

d) Wie viele Bits werden im Mittel übertragen, bevor der Kanal aus einem Zustand mit nur binären Nullen in einen mit keiner Null überführt wird? Wie viele Übergänge werden im umgekehrten Fall (keine Nullen zu nur Nullen) im Mittel durchlaufen?

a) Übergangsgraph:



b) Es ergibt sich die Übergangsmatrix

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Es gilt $\vec{p}_n^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Nach zwei Übergängen gilt

$$\vec{p}_{n+2}^T = \vec{p}_n^T \cdot P^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,375 in den Zuständen 01 oder 10 verblieben.

d) Der Rand enthält nur Zustand 11:

$$
\begin{aligned}
m_{11} &= 0 \\
m_{10} &= 1 + \frac{1}{2} m_{01} + \frac{1}{2} m_{00} \\
m_{01} &= 1 + \frac{1}{2} m_{11} + \frac{1}{2} m_{10} \\
m_{00} &= 1 + \frac{3}{4} m_{00} + \frac{1}{4} m_{01}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} m_{01} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} m_{00} \\
m_{00} &= 1 + \frac{3}{4} m_{00} + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} m_{00} \right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{5}{6} m_{00} \quad \Longrightarrow \quad m_{00} = 9
\end{aligned}
$$

Es werden im Mittel 9 Bit übertragen. Da das Medium in Eins und Null symmetrisch ist, braucht es für den umgekehrten Weg ebenfalls 9 Schritte.