Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

11.09.2014

Musterlösung

Hinweise zur Prüfung

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an. Verwenden Sie bitte bei der Bearbeitung keine rote Farbe und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Beachten Sie besonders: **Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein**, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann. Schreiben Sie leserlich. **Schalten Sie Ihr Handy für die Dauer der Prüfung aus**.

Erlaubte Hilfsmittel

sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes A4-Blatt (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Abzugeben

sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten Ausarbeitungen.

Nicht abzugeben

sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Das Ergebnis

Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **14.10.2014** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG).

Klausureinsicht

ist am **22.10.2014** von **15:00 - 17:00 Uhr** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG).

Aufgabe 1

Betrachtet wird die dreistufige Bearbeitung eines Werkstücks: Zuerst werden vorbereitende Arbeiten (1) ausgeführt, danach erfolgt eine Anpassung der Werkstücke (2) und abschließend eine Prüfung (3).
Zur Analyse wird der Bearbeitungsfortschritt jede Minute festgehalten. Dabei zeigt sich, dass ein Werkstück in Vorbereitung in 20% aller Fälle auch in der nächsten Minute noch nicht zur Anpassung weitergegeben wurde. Die Anpassung eines Werkstücks dauert im Mittel vier Minuten. Nach der Prüfung der fertigen Werkstücke werden 10% zurück zur Anpassung gegeben. In seltenen Fällen (5%) wird ein Werkstück direkt nach der Vorbereitung zur Prüfung weitergereicht.

Der Bearbeitungsvorgang eines Werkstücks soll als diskrete Markoffkette modelliert werden:

a) Die Wahrscheinlichkeit k Minuten im Zustand 2 zu verweilen ist $P(V_2 = k) = p_{22}^k(1 - p_{22})$. Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} P(V_2 = k) = 1$! Berechnen Sie den Erwartungswert der Verweildauer V_2 und damit den Wert für p_{22}!

b) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an!
Falls Sie Teil a) nicht gelöst haben, verwenden Sie $p_{22} = 0{,}8$!

c) Die Bearbeitung eines Werkstücks gilt als abgeschlossen, wenn es mindestens eine Minute im Zustand 3 verweilt hat. Wie lange ist die mittlere Bearbeitungsdauer?

d) Nach wie vielen Minuten sind die vorbereitenden Arbeiten an einem Werkstück mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 abgeschlossen?

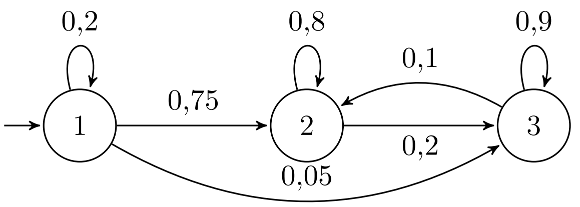
Lösung

a)
$$\sum_{k=0}^{\infty} P(V_2 = k) = (1 - p_{22}) \sum_{k=0}^{\infty} p_{22}^k \underset{p_{22}<1}{\overset{(B.1)}{=}} (1 - p_{22}) \frac{1}{1 - p_{22}} = 1$$

$$E(V_2) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(V_2 = k) = p_{22}(1 - p_{22}) \sum_{k=1}^{\infty} k p_{22}^{k-1} \underset{p_{22}<1}{\overset{(B.1)}{=}} p_{22}(1 - p_{22}) \cdot \left(\frac{1}{1 - p_{22}}\right)'$$

$$= p_{22}(1 - p_{22}) \cdot \frac{1}{(1 - p_{22})^2} = \frac{p_{22}}{1 - p_{22}} \quad \overset{E(V_2) \overset{!}{=} 4}{\Longrightarrow} \quad \underline{p_{22} = 0{,}8}$$

b)



$$\overline{\text{P}} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

c) Die Schleife an Zustand 3 wird durch einen Übergang zu einem neuen Zustand R ersetzt.

$$m_R = 0$$

$$m_3 = 0{,}1 m_2 + 0{,}9 m_R + 1 \quad \Rightarrow \quad m_3 = 0{,}1 m_2 + 1$$

$$m_2 = 0{,}8 m_2 + 0{,}2 m_3 + 1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{1 + 0{,}2}{1 - 0{,}8 - 0{,}2 \cdot 0{,}1} = \frac{20}{3}$$

$$m_1 = 0{,}2 m_1 + 0{,}75 m_2 + 0{,}05 m_3 + 1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1 + 5 + 1{,}25}{1 - 0{,}2} \approx \underline{7 \text{ min } 36 \text{ s}}$$

d) Ereignisse A_k = {„Vorbereitung nach k Minuten abgeschlossen“}, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$

$$P(A_k) = 1 - P(\bar{A}_k) = 1 - p_{11}^k \overset{!}{\geq} 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad k \geq \frac{\log(1 - 0{,}99)}{\log(0{,}2)} \quad \Rightarrow \quad \underline{k \geq 3}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y. X sei über dem Intervall $(700; 800]$, Y über dem Intervall $(1100; 1400]$ gleichverteilt.

a) Berechnen Sie und skizzieren Sie die Dichte von $Z = X + Y$!

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X + Y > 1950$ ist!

c) Geben Sie die Verteilungsfunktion von Z an!

Lösung

a) Die Dichten von X und Y sind

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/100, & \text{für } 700 < x \leq 800 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

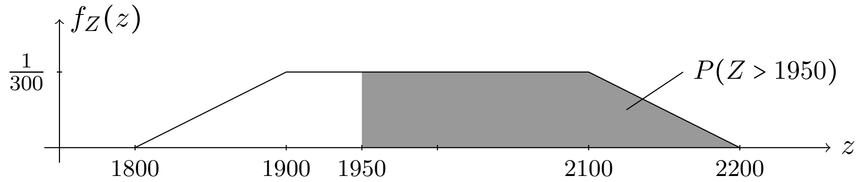
bzw.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/300, & \text{für } 1100 < x \leq 1400 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es gilt $f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y$.

Aus der Aufgabenstellung ist klar, dass $f_Z(z)$ im Intervall $(1800, 2200]$ von Null verschieden ist. Es gilt $f_Z(1800) = 0$. Von $z = 1800$ wächst $f_Z(z)$ linear, bis bei $z = 1900$ $f_Z(1900) = \frac{1}{100}\frac{1}{300}100 = \frac{1}{300}$ gilt. Dann bleibt zwischen 1900 und 2100 $f_Z(z)$ konstant, um anschließend wieder linear abzunehmen bis bei $z = 2200$ $f_Z(2200) = 0$ ist.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } \quad z < 1800 \\ \frac{1}{30000}(z - 1800), & \text{für } 1800 < z \leq 1900 \\ \frac{1}{300}, & \text{für } 1900 < z \leq 2100 \\ -\frac{1}{30000}(z - 2200), & \text{für } 2100 < z \leq 2200 \\ 0, & \text{für } 2200 \leq z \end{cases}.$$



b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gemäß der Abbildung aus Teilaufgabe a)

$$P(Z > 1950) = \int_{1950}^{\infty} f_Z(z) = \frac{2100 - 1950}{300} + \frac{2200 - 2100}{2 \cdot 300} = \frac{2}{3}.$$

Mit Aufgabenteil c) ergibt sich ebenfalls $P(Z > 1950) = 1 - F_Z(1950) = 2/3$.

c)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } \quad z < 1800 \\ 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{30000}(z - 1800)^2, & \text{für } 1800 < z \leq 1900 \\ \frac{1}{6} + \quad \frac{1}{300}(z - 1900)\ , & \text{für } 1900 < z \leq 2100 \\ 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{30000}(z - 2200)^2, & \text{für } 2100 < z \leq 2200 \\ 1, & \text{für } 2200 \leq z \end{cases}.$$

Aufgabe 3

$\{A(nT); n \in \mathbb{Z}\}$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A(nT)=1) = P(A(nT)=-1) = \frac{1}{2}$ und

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t < T, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Impuls. Betrachtet wird der stochastische Prozess

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nT) g(t - nT).$$

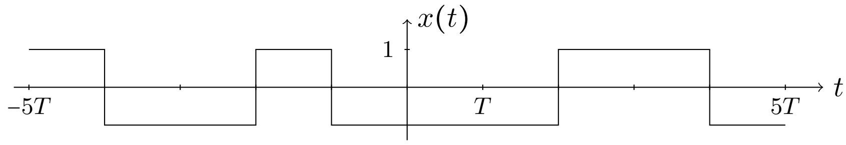
a) Skizzieren Sie eine Realisierung des Prozesses $X(t)$ für $t \in [-5T; 5T)$, bei der $A(nT + T) \neq A(nT)$ an mindestens vier Stellen gilt!

b) Zeigen Sie, dass $X(t)$ ein (schwach) zyklostationärer Prozess ist!

c) Geben Sie die mittlere Leistung von $X(t)$ an!

Lösung

a)



b) Der Prozess ist reellwertig. Es gilt

- $E\Big(X(t + kT)\Big)$

$$= E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nT) \cdot g(t + kT - nT)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\Big(A(nT)\Big) \cdot g(t + kT - nT) = 0 \quad \forall k,$$

  d.h. der Erwartungswert ist mit jeder Periode, also auch mit T periodisch.

- $\varphi_{XX}(t + kT, t + \tau + kT) = E\Big(X(t + kT)X(t + \tau + kT)\Big)$

$$\begin{aligned}
&= E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nT) \cdot g(t + kT - nT) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(mT) \cdot g(t + \tau + kT - mT)\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{E\left(A(nT)A(mT)\right)}_{=\delta_{nm}} \cdot g(t + kT - nT) g(t + \tau + kT - mT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g\Big(t + (n-k)T\Big) g\Big(t + \tau + (n-k)T\Big) \overset{l=n-k}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(t + lT) g(t + \tau + lT) \\
&= \varphi_{XX}(t, t + \tau),
\end{aligned}$$

  d.h. die AKF ist mit der Periode T periodisch.

$\Rightarrow X(t)$ ist zyklostationär mit der Periode T.

c) Die mittlere Leistung ist die AKF für $\tau = 0$. Um die Zeitabhängigkeit zu eliminieren, muss bei zyklostationären Prozessen noch über eine Periode gemittelt werden.

$$\bar{P}_X = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_{XX}(t, t + 0)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T g^2(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

Aufgabe 4

Eine Zielscheibe der Gesamtfläche $G = 1\,\mathrm{m}^2$ ist in drei Teilflächen $A_1 = 0{,}2\,\mathrm{m}^2$, $A_2 = 0{,}3\,\mathrm{m}^2$, $A_3 = 0{,}5\,\mathrm{m}^2$ aufgeteilt. Auf die Gesamtfläche werden neun Schüsse aus einem Luftgewehr abgegeben, bei denen die Kugeln gleichverteilt auf der Gesamtfläche einschlagen.

a) Es wird gezählt, wie viele Kugeln auf den jeweiligen Teilflächen eingeschlagen sind. Geben Sie die vorliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung an und begründen Sie! Geben Sie auch die zugehörige Formel zu Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten an!

b) Berechnen Sie exakt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf jeder der Teilflächen genau drei der neun Kugeln einschlagen!

Lösung

a) Die dem o.g. Experiment handelt es sich um einen Versuch, der mit dem Modell der Polynomialverteilung beschrieben werden kann: Es werden neun unabhängige Wiederholungen eines Wahrscheinlichkeitsexperiments durchgeführt, dass als Ergebnis eines von drei paarweise einander ausschließenden Ereignissen T_j = {„Kugel in Teilfläche j eingeschlagen“}, $j \in \{1, 2, 3\}$ hat.

Die Zufallsvariablen N_j geben die Anzahl der auf Teilfläche j eingeschlagenen Kugeln an.

$$P(N_1 = k_1, N_2 = k_2, N_3 = k_3) = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$$

Die zugehörigen Parameter sind $N = 9$, $p_1 = A_1/G = 0{,}2$, $p_2 = A_2/G = 0{,}3$, $p_3 = A_3/G = 0{,}5$.

b) Mit der obigen Formel ergibt sich

$$P(N_1 = 3, N_2 = 3, N_3 = 3) = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}5^3 = \underline{0{,}0454}.$$

Aufgabe 5

Für die Weite w eines waagerechten Wurfs mit der Geschwindigkeit $v > 0$ von einer Höhe $h > 0$ gilt $w = \gamma(h) = \sqrt{2hv^2/g} > 0$, wobei g eine Konstante ist.

a) Die Höhe H sei zufällig und gleichverteilt im Intervall $[2; 8)$. Berechnen Sie die resultierende Dichte der Wurfweite $f_W(w)$!

b) Berechnen Sie die mittlere Wurfweite und die Varianz von W!

c) Zeigen Sie durch direkte Berechnung, dass $E(W) = E(\gamma(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(h) f_H(h) \mathrm{d}h$ und $E(W) \neq \gamma(E(H))$ gelten und geben Sie für beide Aussagen eine Erklärung an!

Lösung

a) Es gilt $W = \gamma(H) = \sqrt{\frac{2v^2}{g} H}$ mit der reellen Wurzel $h_1 = \frac{g}{2v^2} w^2$:

$$f_W(w) = \frac{f_H(h_1)}{|\gamma'(h_1)|} = \frac{gw}{6v^2} \cdot f_H\left(\frac{gw^2}{2v^2}\right) \qquad \text{mit } \gamma'(h) = \frac{v}{\sqrt{2gh}}$$

Mit $H \sim \mathcal{U}[2; 8)$ ergeben sich die Grenzen $w_1 = \gamma(2) = \frac{2v}{\sqrt{g}}$, $w_2 = \gamma(8) = \frac{4v}{\sqrt{g}}$ und damit

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{gw}{6v^2} & \text{für } w_1 \leq w < w_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Die mittlere Wurfweite ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w) \, \mathrm{d}w = \int_{w_1}^{w_2} \frac{gw^2}{6v^2} \, \mathrm{d}w = \frac{g}{6v^2} \left[\frac{1}{3} w^3\right]_{w=w_1}^{w_2} \\ &= \frac{v}{18\sqrt{g}} \left[4^3 - 2^3\right] = \frac{28v}{9\sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Die Varianz berechnet sich gemäß:

$$E(W^2) = \int_{w_1}^{w_2} \frac{gw^3}{6v^2} \, \mathrm{d}w = \frac{g}{6v^2} \left[\frac{1}{4} w^4\right]_{w=w_1}^{w_2} = \frac{v^2}{24g} \left[4^4 - 2^4\right] = \frac{10v^2}{g}$$

$$\operatorname{var}(W) = E(W^2) - E^2(W) = \frac{10v^2}{g} - \frac{784v^2}{81g} = \frac{26v^2}{81g}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} E(\gamma(H)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(h) f_H(h) \, \mathrm{d}h = \int_2^8 \sqrt{\frac{2v^2 h}{g}} \cdot \frac{1}{6} \, \mathrm{d}h = \frac{v}{6} \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}}\right]_{h=2}^{8} \\ &= \frac{2^{\frac{3}{2}} v}{18\sqrt{g}} \left[8^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{28v}{9\sqrt{g}} = E(W) \end{aligned}$$

und

$$\gamma(E(H)) = \sqrt{\frac{2v^2}{g} E(H)} = \frac{\sqrt{10} v}{\sqrt{g}} \neq E(W).$$

Der Erwartungswertoperator ist linear. Da $\gamma(h)$ eine nichtlineare Abbildung ist, können diese beiden Operationen nicht einfach vertauscht werden. $E(\gamma(H)) = E(W)$, da bei der Erwartungswertbildung von $\gamma(H)$ ein mit der Dichte $f_H(h)$ gewichtetes Mittel aller möglichen Wurfweiten $w = \gamma(h)$ gebildet wird.

Aufgabe 6

Gegeben sind die normalverteilte Zufallsvariable N mit dem Erwartungswert σ und der Varianz σ^2 sowie die davon unabhängige binärverteilte Zufallsvariable $A \in \{a_1, a_2\}$ mit $a_2 = a_1 + 3\sigma$ und $P(A{=}a_1) = p$. Betrachtet wird $S = A + N$.

a) Geben Sie die „Dichte“ von A an und berechnen Sie $f_S(s)$!

b) Skizzieren Sie die Dichten $f_S(s\,|\,A{=}a_1)$ und $f_S(s\,|\,A{=}a_2)$ in ein Koordinatensystem!

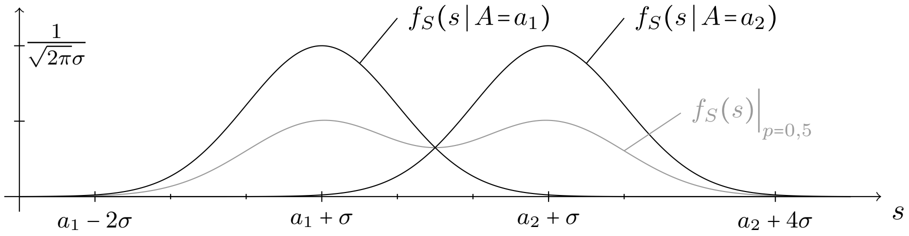
c) Berechnen Sie $P(S - \sigma > \frac{1}{2}(a_2 + a_1)\,|\,A{=}a)$ für $a \in \{a_1, a_2\}$!

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $S \le a_2 + \sigma$ für $p = 0{,}5$?

Lösung

a)
$$f_A(a) = p \cdot \delta(a - a_1) + (1-p)\cdot\delta(a - a_2)$$
$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(s-a) f_A(a)\,\mathrm{d}a \;=\; p\cdot f_N(s-a_1) + (1-p)\cdot f_N(s-a_2)$$
$$= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(s-(a_1+\sigma))^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(s-(a_1+4\sigma))^2}{2\sigma^2}\right).$$

b) Die beiden Dichten ergeben sich aus einer Verschiebung der Dichte $f_N(s)$ um a_1 bzw. a_2.



c) Mit $S_{A=a_1} \sim \mathcal{N}(a_1 + \sigma; \sigma^2)$ ergibt sich

$$P(S - \sigma > \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1)\,|\,A{=}a_1) = 1 - P\left(S_{A=a_1} \le a_1 + \tfrac{3}{2}\sigma + \sigma\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{(a_1 + \frac{5}{2}\sigma) - (a_1 + \sigma)}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1{,}50) = \underline{6{,}68\%}.$$

Wegen der Symmetrie der beiden bedingten Dichten um $s = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) + \sigma$ ist

$$P(S - \sigma > \tfrac{1}{2}(a_2 + a_1)\,|\,A{=}a_2) \overset{b)}{=} 1 - P\left(S_{A=a_1} \le a_1 + \tfrac{5}{2}\sigma\right) = \Phi(1{,}50) = \underline{93{,}32\%}.$$

d) Es ist $N \sim \mathcal{N}(\sigma; \sigma^2)$ und damit $F_N(n) = \Phi(n/\sigma - 1)$:

$$P(S \le a_2 + \sigma) \overset{a)}{=} \int_{-\infty}^{a_2+\sigma} p\cdot f_N(s - a_1) + (1-p)\cdot f_N(s-a_2)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}F_N(4\sigma) + \tfrac{1}{2}F_N(\sigma)$$
$$= \tfrac{1}{2}\big[\Phi(3{,}00) + \Phi(0{,}00)\big] = \tfrac{1}{2}(0{,}99865 + 0{,}5) = \underline{74{,}93\%}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b\cos(bx)\Big) \tag{C.4}$$