Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

09.09.2016

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **12.10.2016** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **18.10.2016** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG) von **10:00 bis 11:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **25.10.2016** statt.

Aufgabe 1

Betrachtet wird ein Würfelspiel, bei dem ein Tetraeder, ein Hexaeder und ein Oktaeder gleichzeitig geworfen werden. Die Würfel sind symmetrisch und ihre Seiten mit Eins beginnend nummeriert.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an.

b) Berechnen die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $A = \{\text{alle drei Polyeder zeigen die gleiche Zahl}\}$ und $B = \{\text{genau zwei der Polyeder zeigen eine Vier}\}$.

c) Für den Einsatz von 60 Cent darf ein Spieler die drei Polyeder einmal werfen. Die Anzahl der gewürfelten Einsen erhält er in Euro ausbezahlt. Welchen Gewinn kann der Anbieter des Würfelspiels bei 100 Würfen mit Mittel erwarten?

d) Die Augensumme ist die Summe der drei gewürfelten Zahlen. Jemand behauptet, dass die Augensumme 6 häufiger auftritt als die Augensumme 15. Überprüfen Sie diese Behauptung.

Lösung

a) Ergebnisse als Tupel der drei Augenzahlen:

$$\Omega = \Big\{(t,h,o);\ t \in \{1,2,3,4\}, h \in \{1,2,...,6\}, o \in \{1,2,...,8\}\Big\}$$

b) Ereignis A: Da der Tetraeder nur Zahlen bis Vier trägt, spielen größere Augenzahlen keine Rolle. Es sei $A_i = \{\text{alle drei Polyeder zeigen die Zahl } i\}$ mit $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$P(A_i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{192} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 4 \cdot P(A_i) = \frac{1}{48} \approx 2{,}08\%$$

Ereignis B: Es gibt drei Möglichkeiten, dass einer der Würfel keine Vier zeigt:

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{64} = 7{,}81\%$$

c) Die Augenzahlen der Würfel werden durch die Zufallsvariablen T, H und O beschrieben. Diese sind voneinander unabhängig. Die Beiträge der einzelnen Würfel zum Auszahlungsbetrag r können daher addiert werden:

$$r = P(T{=}1) \cdot 1€ + P(H{=}1) \cdot 1€ + P(O{=}1) \cdot 1€ = \frac{13}{24} \cdot 1€ = 0{,}54167€$$

Für den Anbieter ergibt sich ein mittlerer Gewinn von $0{,}60€ - r = 0{,}05833€$ pro Spiel und damit 5,83€ für 100 Spiele.

d) Die Augensumme sechs kann nur aus Permutationen der Ereignisse $(1,2,3)$, $(1,1,4)$ und $(2,2,2)$ gebildet werden. Davon gibt es 6 bzw. 3 bzw. 1 verschiedene, also insgesamt 10 gleichwahrscheinliche Ereignisse.

Zur Bildung der Augensumme 15 müssen für $t = 1$ die anderen beiden Würfen die jeweils maximale Augenzahl zeigen, also $(1,6,8)$, wovon es nur eine gültige Permutation gibt. Für $t = 2$ ergeben sich mit $(2,5,8)$ und $(2,6,7)$ zwei gültige Ereignisse. Analog dazu ergeben sich für $t = 3$ drei und für $t = 4$ vier gültige Ereignisse. Insgesamt kann die Augenzahl 15 durch $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ gleichwahrscheinliche Ereignisse gebildet werden.

Die Augensummen 6 und 15 treten gleich häufig auf. Die Behauptung ist falsch.

Aufgabe 2

Bei einem Wurfspiel müssen Bälle mit einem Durchmesser von 8 cm durch eine quadratische Öffnung geworfen werden. Es sei angenommen, dass ein Ball die Öffnung nur dann passiert, wenn sein gesamter Umfang diese trifft. In der Ebene der Öffnung treffen die Bälle gemäß einer Normalverteilung mit unkorrelierten, identisch verteilten Koordinaten X und Y auf. Die Erwartungswerte von X und Y liegen im Zentrum der Öffnung, ihre Varianzen sind $\sigma^2 = 300\,\text{cm}^2$.
Die Trefferwahrscheinlichkeit soll 0,2 betragen. Im Mittel werden 10 Würfe pro Minute ausgeführt. Die Anzahl geworfener Bälle folgt einer Poissonverteilung. Der Auffangbehälter hinter der Öffnung fasst 20 Bälle.

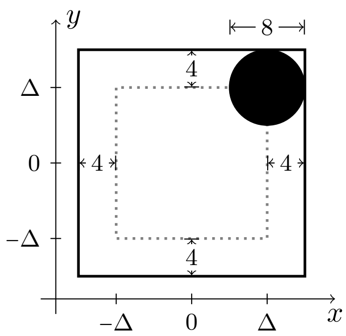
a) Bestimmen Sie die Kantenlänge der Öffnung.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Auffangbehälter 10 Minuten nach seiner letzten Leerung noch nicht voll, wenn er nach 8 Minuten schon 16 Bälle enthält?

c) Wie viele Minuten nach der letzten Leerung ist der Behälter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 überfüllt, wenn er nach 9 Minuten genau 20 Bälle enthält?

Lösung

a) Der Koordinatenursprung sei im Zentrum der Öffnung. Damit sind X und Y aus $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ und unabhängig. Weiter sei Δ die maximal mögliche horizontale und vertikale Abweichung vom Zentrum um noch einen Treffer zu erzielen.



$$\begin{aligned} P\big\{|X| \le \Delta \;\wedge\; |Y| \le \Delta\big\} &= P\{|X| \le \Delta\} \cdot P\{|Y| \le \Delta\} \\ &= P^2\big\{|X| \le \Delta\big\} = \big(\Phi(\Delta/\sigma) - \Phi(-\Delta/\sigma)\big)^2 \\ &= \big(2\Phi(\Delta/\sigma) - 1\big)^2 \overset{!}{=} 0{,}2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(\Delta/\sigma) \overset{!}{=} 0{,}72361 \overset{\text{Tab. A}}{\Rightarrow} \Delta = 0{,}60\sigma = 10{,}39\,\text{cm} \quad (\text{exakt: } 0{,}5936\sigma = 10{,}28\,\text{cm})$$

Die Öffnung muss eine Kantenlänge von $2\cdot(\Delta + 4\,\text{cm}) = \underline{28{,}78\,\text{cm}}$ (exakt: 28,56 cm) aufweisen.

b) Die Anzahl der Bälle im Auffangbehälter lässt sich durch einen Poissonprozess $Z(t)$ mit $\lambda = 0{,}2 \cdot 10\,\text{min}^{-1} = 2\,\text{min}^{-1}$ beschreiben. Es ist $P\{Z(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

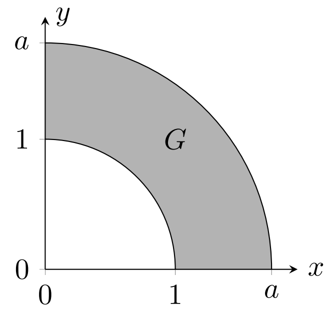
$$P\big\{Z(10) < 20 \,\big|\, Z(8) = 16\big\} = P\big\{Z(2) < 4\big\} = \sum_{k=0}^{3} \frac{4^k}{k!}\mathrm{e}^{-4} = \left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right)\mathrm{e}^{-4} = \underline{0{,}4335}$$

c) Die zufällige Zeit T, die zwischen der Ankunft des 20. und 21. Balls vergeht, ist aus $\text{Exp}(\lambda)$.
(oder ausführlich: $P\{Z(9+\tau) > 20 \mid Z(9) = 20\} = 1 - P\{Z(\tau) = 0\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \overset{!}{=} 0{,}95$)

$$P\big\{T \le \tau\big\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \overset{!}{=} 0{,}95 \qquad \Rightarrow \tau = -\ln(0{,}05)/\lambda = 1{,}498$$

Der Korb ist nach $9 + 1{,}498 = \underline{10\,\text{min}\;30\,\text{s}}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 überfüllt.

Aufgabe 3



Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X, Y)^T$ sei im Gebiet G aus nebenstehender Abbildung wie folgt verteilt:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot y^3, & \text{für } (x,y) \in G, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei gilt stets $a > 1$.

a) Prüfen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

b) Geben Sie die Verteilung von $\vec{Z}$ in Polarkoordinaten R, Φ an und bestimmen Sie a.

c) Prüfen Sie R und Φ auf Unabhängigkeit.

Lösung

a) X und Y sind keine unabhängigen Zufallsvariablen. $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$; der Träger beider Randdichten ist $[0, a]$ und der ihres Produktes ein Rechteck, d.h. es gibt nicht verschwindende Werte außerhalb von G.

b) Es gilt $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Weiter ist $|J| = \cos\varphi \cdot r\cos\varphi - \sin\varphi \cdot (-r\sin\varphi) = r$.

$$f_{R,\Phi}(r,\varphi) = f_{X,Y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r = \begin{cases} r^5 \cdot \cos\varphi \sin^3\varphi, & \text{für } r \in (1; a] \ \wedge \ \varphi \in (0; \frac{\pi}{2}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Parameter a muss so gewählt werden, dass sich die Wahrscheinlichkeitsmasse 1 ergibt:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_{R,\Phi}(r,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_1^a r^5\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,(\sin\varphi)^3\,\mathrm{d}\varphi = \left[\tfrac{1}{6}r^6\right]_1^a \cdot \left[\tfrac{1}{4}\sin^4\varphi\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{24}(a^6 - 1) \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = \sqrt[6]{25} = 1{,}710}$$

c) R und Φ sind unabhängig. Der Träger der Randdichten ist $(1; a]$ für R und $(0; \frac{\pi}{2}]$ für Φ. Der ihres Produktes ist G. Weiterhin ist der Term$(r^5 \cdot \cos\varphi \sin^3\varphi)$ in r und φ separierbar und damit gilt $f_{R,\Phi}(r,\varphi) = f_R(r) \cdot f_\Phi(\varphi)$. Dies lässt sich auch anhand der unabhängigen Integrierbarkeit in Aufgabenteil b) erkennen.

<u>Alternativ</u> können die Randdichten auch explizit berechnet werden:
Für $r \notin (1; a]$ bzw. $\varphi \notin (0; \frac{\pi}{2}]$ verschwinden diese; ansonsten gilt:

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Phi}(r,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = r^5 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,(\sin\varphi)^3\,\mathrm{d}\varphi = r^5\left[\tfrac{1}{4}\sin^4\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{r^5}{4}$$

$$f_\Phi(\varphi) = \int_0^\infty f_{R,\Phi}(r,\varphi)\,\mathrm{d}r = \cos\varphi\sin^3\varphi \int_1^a r^5\,\mathrm{d}r = \cos\varphi\sin^3\varphi \cdot \left[\tfrac{1}{6}r^6\right]_1^a = 4\cos\varphi\sin^3\varphi$$

Offensichtlich ist $f_{R,\Phi}(r,\varphi) = f_R(r) \cdot f_\Phi(\varphi)$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird die Inbetriebnahme eines komplexen Systems. Vor dem Erreichen des Betriebszustands B müssen K aufeinanderfolgende Testroutinen $(1, 2, ..., K)$ erfolgreich durchlaufen werden. Modellieren Sie diesen Prozess als homogene Markovkette mit $K + 1$ Zuständen. Begonnen wird mit Routine 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Routine fehlschlägt und wiederholt werden muss, sei $1 - p/k$; ansonsten wird die nächste Routine gestartet bzw. bei dem k-ten Test in den Betriebszustand gewechselt und dort verblieben.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen für $K = 4$.

b) Berechnen Sie die mittlere Dauer des Prozesses für alle $K \in \mathbb{N}$ in geschlossener Form und berechnen Sie für $K = 10$ den Parameter p so, dass sich eine mittlere Dauer von 80 Schritten ergibt.

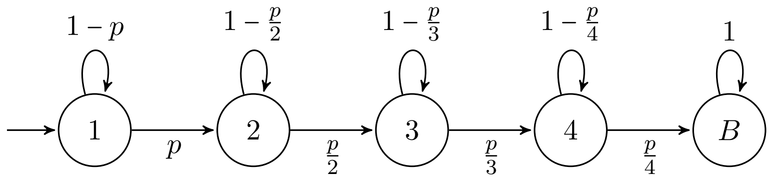
c) Für $K = 3$ liegt die Zustandsverteilung $(\ 0{,}1\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}6\ ;\ 0{,}1\ )^T$ vor. Berechnen Sie die mittlere Dauer bis zum Erreichen des Betriebszustands in Abhängigkeit von p.

Für eine erhöhte Sicherheit sollen bei Störungen im Betriebszustand alle Testroutinen erneut durchlaufen werden. Eine solche Störung tritt mit Wahrscheinlichkeit $p(K + 1)^{-1}$ auf.

d) Geben Sie für $K = 1$ die mittlere Zustandsverteilung des Systems an.

Lösung

a)



b) Gesucht ist m_1. Es gilt $m_B = (m_{K+1} =)\ 0$ und für $k \leq K$

$$m_k = 1 + \left(1 - \frac{p}{k}\right) m_k + \frac{p}{k} m_{k+1} = \frac{k}{p} + m_{k+1} \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{K} k \overset{\text{(B.5)}}{=} \underline{\frac{K}{2}(K+1) \cdot p^{-1}}$$

Für $K = 10$ ist $m_1 = 55/p \overset{!}{=} 80$ und somit $\underline{p = 0{,}6875}$.

c) Es ist $m_B = 0$, $m_3 = 3/p$, $m_2 = 5/p$ und $m_1 = 6/p$ und somit:

$$\bar{m} = 0{,}1 \cdot m_1 + 0{,}2 \cdot m_2 + 0{,}6 \cdot m_3 + 0{,}1 \cdot m_E = \underline{3{,}4 \cdot p^{-1}}$$

d) Für $K = 1$ gibt es nur die Zustände 1 und B. Die modifizierte Übergangsmatrix ist

$$\overline{P}_* = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ \frac{p}{2} & 1 - \frac{p}{2} \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist der stochastische Eigenvektor $\vec{p}_{ss} = \overline{P}_*^T \vec{p}_{ss}$, zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$\left(\overline{P}_*^T - \lambda E_2\right) \vec{p}_{ss} = \begin{bmatrix} (1-p) - 1 & \frac{p}{2} \\ p & (1 - \frac{p}{2}) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es folgt $p_2 = 2p_1$ und wegen $p_1 + p_2 = 1$ schließlich $\underline{\vec{p}_{ss} = \left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\right)^T}$.

Aufgabe 5

Die Schiefe einer Zufallsvariablen X ist definiert als

$$S(X) = \frac{E\{X^3\} - 3D^2\{X\}E\{X\} - E^3\{X\}}{D^3\{X\}}$$

a) Zeigen Sie $S(aX) = S(X)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie $S(X+b) = S(X)$ für alle $b \in \mathbb{R}$.

Gegeben ist die Zufallsvariable X mit $f_X(x) = \frac{x}{4}\exp(-2x)$ für $x > 0$ und null sonst.

c) Geben Sie die Funktion an, die X normiert.

d) Berechnen Sie $S(X)$.

Lösung

a) Es gilt $E\{aX\} = aE\{X\}$ und $D^2\{aX\} = a^2D^2\{X\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} S(aX) &= \frac{a^3E\{X^3\} - 3a^2D^2\{X\}\cdot aE\{X\} - a^3E^3\{X\}}{a^3D^3\{X\}} \\ &= \frac{a^3\left(E\{X^3\} - 3D^2\{X\}\cdot E\{X\} - E^3\{X\}\right)}{a^3D^3\{X\}} = S(X) \end{aligned}$$

b) Es gilt $E\{X+b\} = E\{X\} + b$ und $D^2\{X+b\} = D^2\{X\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} S(X+b) &= D^{-3}\{X\}\cdot\begin{pmatrix} E\{X^3\} + 3E\{X^2\}b + 3E\{X\}b^2 + b^3 - 3D^2\{X\}(E\{X\}+b) \\ -E^3\{X\} - 3E^2\{X\}b - 3E\{X\}b^2 - b^3 \end{pmatrix} \\ &= D^{-3}\{X\}\cdot\left(E\{X^3\} + 3D^2\{X\}b - 3D^2\{X\}E\{X\} - 3D^2\{X\}b - E^3\{X\} \right) \\ &= D^{-3}\{X\}\cdot\left(E\{X^3\} - 3D^2\{X\}E\{X\} - E^3\{X\} \right) = S(X) \end{aligned}$$

c) Gesucht ist die Funktion $g(X) = (X - E\{X\})/D\{X\}$

$$E\{X^n\} = \frac{1}{4}\int_0^\infty x^{n+1}\exp(-2x)\,\mathrm{d}x \overset{(C.5)}{=} \frac{(n+1)!}{2^{n+4}} \qquad ,n > 1$$

$$E\{X\} = \tfrac{1}{16};\ E\{X^2\} = \tfrac{3}{32} \quad\Rightarrow\quad D^2\{X\} = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \tfrac{23}{256} \quad\Rightarrow\quad D\{X\} = \tfrac{\sqrt{23}}{16}$$

Damit ist $\underline{g(x) = 23^{-1/2}\cdot(16x-1)}$.

d) Mit der Formel aus b) folgt $E\{X^3\} = \frac{3}{16}$ und damit

$$S(X) = \frac{\frac{3}{16} - 3\cdot\frac{23}{256}\cdot\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{16}\right)^3}{\left(\frac{23}{256}\right)^{3/2}} = \frac{3\cdot 256 - 3\cdot 23 - 1}{23^{3/2}} = \underline{6{,}328}$$

<u>Alternativ</u> kann auch $S(X) = E\{g^3(X)\}$ zur Lösung verwendet werden.

Aufgabe 6

Zur Pflasterung eines Platzes werden Steine mit den Längen 1, 3 und 5 unabhängig voneinander zufällig ausgewählt und zu Reihen aneinander gelegt. Insgesamt müssen 35 Reihen der Länge 54 gelegt werden. Der ggf. überstehende Teil jeder Reihe wird abgeschnitten und an den Anfang der nächsten gelegt. Alle Steinlängen treten gleich häufig auf.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden in einer Reihe mit 18 Steinen von jeder Länge gleich viele verwendet?

b) Wie viele Steine werden erwartungsgemäß benötigt, um den gesamten Platz zu pflastern?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 650 Steine zur Pflasterung des gesamten Platzes?

d) Wie viele Steine werden mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 den gesamten Platz pflastern zu können?

Hinweis: Wo nötig, kann mit der Normalverteilung approximiert werden.

Lösung

a) Sei A_n die Anzahl Steine der Länge $n \in \{1, 3, 5\}$ in einer Reihe mit 18 Steinen. Es ergibt sich eine Polynomialverteilung und damit

$$P(A_1 = A_3 = A_5 = 6) = \frac{18!}{6!\,6!\,6!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \underline{4{,}428\%}.$$

b) Ein Stein habe die Länge S. $E\{S\} = m_S = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = 3$. Im Mittel werden $54/m_S = 18$ Steine pro Reihe benötigt. Insgesamt $18 \cdot 35 = \underline{630}$.

c) Da am Ende einer Reihe überstehende Steine abgeschnitten und vorne angesetzt werden, kann man den Platz auch als eine Reihe der Länge $l = 1890$ modellieren. Die Längen der Steine sind identisch und unabhängig verteilt. Ihre Summe kann gemäß dem zentralen Grenzwertsatz mit $R_N \sim \mathcal{N}(N\,m_S, N\,d_S^2)$ mit $N = 650$, $d_S^2 = \frac{1}{3}[(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2] = \frac{8}{3}$ approximiert werden:

$$P(R_N > l) = 1 - \Phi\left(\frac{l - N m_S}{N^{1/2} d_S}\right) = 1 - \Phi\,(-1{,}4412) \approx \Phi\,(1{,}44) = \underline{0{,}9252} \;\; \text{(exakt: 0,92523)}$$

d) Die gesuchte Anzahl Steine sei $\tilde{N}$.

$$P(R_{\tilde{N}} > l) = 1 - \Phi\left(\frac{l - \tilde{N} m_S}{\tilde{N}^{1/2} d_S}\right) \overset{!}{\geq} 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \frac{1890 - 3\tilde{N}}{\frac{8}{3}\tilde{N}^{1/2}} \overset{!}{\leq} -2{,}34 \quad \text{(exakt: } -2{,}326)$$

Mit der Substitution $u = \tilde{N}^{1/2} > 0$ gilt für den Grenzfall:

$$0 = u^2 - 1{,}274u - 630 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = 0{,}6369 \pm \sqrt{630{,}4} \quad \overset{u>0}{\Rightarrow} \quad u = u_1 = 25{,}74$$

Daher ist $\tilde{N} \geq u^2 = 662{,}8$ (exakt: 662,6). Es werden also <u>mindestens 663 Steine</u> benötigt.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \qquad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.5}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.4}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.5}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.6}$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{D.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{D.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{D.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{D.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{D.5}$$