Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

27.09.2017

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **7.11.2017** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **14.11.2017** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG) Sie erfolgt für alle Teilnehmer von **9:00 bis 10:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **24.11.2017** statt.

Aufgabe 1

Im Deutschen Zahlenlotto wurden bis zum 1. Mai 2013 zunächst zufällig, ohne Zurücklegen, sechs Zahlen aus der Menge $\{1, 2, ..., 49\}$ und anschließend, ebenfalls zufällig, aus der Menge der bisher nicht gezogenen Zahlen die Zusatzzahl gezogen, die in den folgenden Aufgaben keine Rolle spielt.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl gezogener Primzahlen in den sechs Zahlen ohne Zusatzzahl an. (Hinweis: Die Zahl 1 ist per Definition keine Primzahl!)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

b) die sechs gezogenen Zahlen Primzahlen sind.

c) das Produkt der sechs gezogenen Zahlen durch 10 teilbar ist, falls alle gezogenen sechs Zahlen Primzahlen sind.

d) die sechs Zahlen in aufsteigender Reihenfolge gezogen wurden, falls alle gezogenen sechs Zahlen Primzahlen sind.

Lösung

a) Die Anzahl der Primzahlen lässt sich z.B. mit dem Sieb des Eratosthenes bestimmen:

$\cancel{1}$	2	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$
11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19	$\cancel{20}$
$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29	$\cancel{30}$
31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$
41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$	

$\Rightarrow$ Es gibt 15 Primzahlen in der Menge $\{1, 2, ..., 49\}$.

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der gezogenen Primzahlen. Diese folgt einer hypergeometrischen Verteilung mit $M = 15$, $N = 49$ und $n = 6$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{15}{k}\binom{34}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \quad k \in \{0, 1, ..., 6\}$$

b) Für $k = 6$ folgt gemäß der Verteilung für X

$$P(X=6) = \frac{\binom{15}{6}\binom{34}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{15}{49} \cdot \frac{14}{48} \cdot \frac{13}{47} \cdot \frac{12}{46} \cdot \frac{11}{45} \cdot \frac{10}{44} = \underline{\frac{65}{181608} = 0{,}03579\%.}$$

c) Ein durch 10 teilbares Produkt entsteht, wenn 2 und 5 in der Ziehung enthalten und die anderen Primzahlen beliebig sind. Es folgt:

$$P(\text{Produkt durch 10 teilbar}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{13}{4}}{\binom{15}{6}} = \frac{5 \cdot 6}{14 \cdot 15} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429 = 14{,}29\%$$

d) Bei 6 gezogenen Zahlen gibt es 6! Möglichkeiten der Anordnung. Hiervon ist nur diejenige „günstig", bei der die Reihenfolge aufsteigend ist. Somit ist:

$$P(\text{aufsteigend gezogen}) = 1/6! = 1/720 \approx 0{,}00139 = 0{,}139\%.$$

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y} & \text{, für } 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie den Bereich der (x, y)-Ebene, über dem $f_{X,Y}(x, y)$ von Null verschieden ist.

b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y.

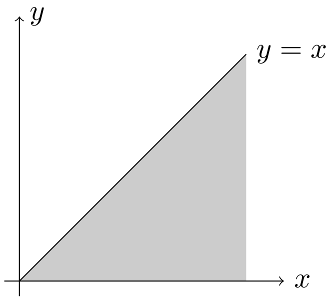
c) Begründen Sie, ob X und Y unabhängig sind.

d) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

e) Verwenden Sie die berechnete Kovarianz, um die Unabhängigkeit von X und Y zu bewerten.

Lösung

a)



b) Für $x \geq 0$ bzw. $y \geq 0$ gilt (außerhalb davon verschwinden die Randdichten):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x 2\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{e}^{-x}\Big[-\mathrm{e}^{-y}\Big]_0^x = 2\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_y^{\infty} 2\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e}^{-y}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_y^{\infty} = 2\,\mathrm{e}^{-2y}$$

c) Sie sind nicht unabhängig. Gegenbeispiel: $f_{X,Y}(1, 2) = 0 \neq f_X(1) \cdot f_Y(2)$

d) Man erkennt, dass Y einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 2$ folgt. Es gilt $E\{Y\} = \lambda^{-1} = \frac{1}{2}$. Man rechnet:

$$E\{X\} = 2\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \overset{C.5}{=} 2\frac{1!}{1^2} - 2\frac{1!}{2^2} = \frac{3}{2}$$

$$E\{XY\} = 2\int_0^{\infty}\int_0^x xy\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \overset{C.2}{=} 2\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\Big[\mathrm{e}^{-y}(-y-1)\Big]_0^x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-2x} - x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x \overset{C.5}{=} 2\left(\frac{1!}{1^2} - \frac{1!}{2^2} - \frac{2!}{2^3}\right) = 1$$

$$\mathrm{cov}\{X,Y\} = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\} = 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

e) Wären X und Y unabhängig, so wären sie auch unkorreliert. Die Kovarianz müsste 0 sein, was sie nicht ist. Somit sind die Zufallsvariablen nicht unabhängig.

Aufgabe 3

Die Anzahl der an einer Bushaltestelle eintreffenden Fahrgäste folgt einem Poissonprozess mit der mittleren Ankunftsrate $\lambda = 2$ pro Minute. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass

a) in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn höchstens zwei Fahrgäste eintreffen,

b) in den folgenden zweieinhalb Minuten gar kein Fahrgast eintrifft.

Jeder ankommende Bus hat Platz für 60 Fahrgäste. Die Busse verkehren halbstündlich.

c) Wie lange muss ein Bus nach Eintreffen des 59. Fahrgastes höchstens warten, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 voll besetzt abfahren kann (unabhängig vom Fahrplan).

d) Gerade ist ein Bus abgefahren, es wartet niemand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verpassen genau fünf Fahrgäste den nächsten Bus, wenn dieser fünf Minuten zu früh abfährt? Es wird angenommen, dass bei pünktlicher Abfahrt genau 60 Fahrgäste an der Haltestelle stehen.

Lösung

a) Es gilt

$$P\Big(X(t) = k\Big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Mit $\lambda = 2\ \text{min}^{-1}$ und $t = 1$ min folgt

$$\begin{aligned} P\Big(X(1) \le 2\Big) &= P\Big(X(1) = 0\Big) + P\Big(X(1) = 1\Big) + P\Big(X(1) = 2\Big) \\ &= \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 5e^{-2} \approx \underline{0{,}6767}. \end{aligned}$$

b) Jetzt ist $\lambda = 2\text{min}^{-1}$ und $t = 2{,}5$ min und damit

$$P\Big(X(2{,}5) = 0\Big) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} \approx \underline{0{,}0067}.$$

c) Die exponential-verteilte Zufallsvariable T beschreibt die Zeitdifferenz aufeinanderfolgender Ereignisse.

$$\begin{aligned} P\Big(T \le \tau\Big) &= F_T(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau} \overset{!}{=} 0{,}99 \\ &\Longrightarrow \quad \tau = -\frac{\ln(0{,}01)}{2\ \text{min}^{-1}} = 2{,}303\ \text{min} \approx \underline{2\ \text{min}\ 19\ \text{sec}} \end{aligned}$$

d) Mit $p = \frac{30-5}{30} = \frac{5}{6}$ gilt

$$P\Big(X(30-5) = 60-5 \Big| X(30) = 60\Big) = \binom{60}{55} \cdot p^{55} \cdot (1-p)^5 \approx \underline{3{,}102\%}.$$

Aufgabe 4

In einer Seidenspinnerei werden Rohfäden von Seidenkokons abgewickelt und zu Seidenfäden versponnen. Es wird angenommen, dass die verwertbare Fadenlänge pro Kokon durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 800\,\mathrm{m}$ und Varianz $\sigma^2 = 6400\,\mathrm{m}^2$ angemessen beschrieben werden kann. Die Fadenlängen der Kokons sind unabhängig voneinander.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons mindestens 750 m beträgt.

b) Welche verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 wenigstens erreicht?

c) Wie viele Kokons müssen abgewickelt werden, damit mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit die Gesamtlänge der verwertbaren Seidenfäden mindestens 100 km beträgt?

Lösung

a) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ die verwertbare Fadenlänge eines Kokons.

$$P\big(X \geq 750\big) = 1 - \Phi\left(\frac{750-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-0{,}625\right) = \Phi\left(0{,}625\right) = \underline{0{,}7324} \quad \text{(exakt: 0,734)}$$

b) Gesucht ist die Fadenlänge x_b mit

$$P\big(X \geq x_b\big) \stackrel{!}{=} 0{,}8 \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{x_b-\mu}{\sigma}\right) \stackrel{!}{=} 0{,}2 \quad \stackrel{\text{Tab.}}{\Rightarrow} \frac{x_b-\mu}{\sigma} \stackrel{!}{\approx} -0{,}84 \quad \text{(exakt: } -0{,}8416)$$

$$\Rightarrow \underline{x_b \approx 732{,}8\,\mathrm{m}} \quad \text{(exakt: } 732{,}7\,\mathrm{m})$$

c) Bei N abgewickelten Kokons ist die Gesamtlänge $S_N \sim \mathcal{N}(N\mu; N\sigma^2)$. Weiter sei $s = 100000$.

$$P\big(S_N \geq s\big) \stackrel{!}{=} 0{,}98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{s-N\mu}{\sqrt{N}\sigma}\right) \stackrel{!}{=} 0{,}02 \quad \stackrel{\text{Tab.}}{\Rightarrow} s_0 = \frac{s-N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \stackrel{!}{\approx} -2{,}06 \quad \text{(exakt: } -2{,}054)$$

$$\Rightarrow\; 0 = \left(\sqrt{N}\right)^2 + \frac{s_0\sigma}{\mu}\left(\sqrt{N}\right)^1 - \frac{s}{\mu} \quad \Rightarrow\; N = \left(-\frac{s_0\sigma}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{s_0^2\sigma^2}{4\mu^2} + \frac{s}{\mu}}\right)^2 = 127{,}324 \quad \text{(exakt: 127,318)}$$

(Die zweite Lösung der a-b-c-Formel wird hier wegen $N \geq 0$, also auch $\sqrt{N} \geq 0$ verworfen)

$\Rightarrow$ Es müssen <u>mindestens 128</u> Kokons abgewickelt werden.

Aufgabe 5

Herr Schmidt hat beschlossen, in seinem Haus so lange es geht, „alte“ Glühlampen einzusetzen. Heute besitzt er noch zwei Reservelampen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Tag eine defekte Lampe ersetzt werden muss, ist $p > 0$. Es kann davon ausgegangen werden, dass nicht mehr als eine Lampe pro Tag ersetzt werden muss. Mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ muss keine Lampe ersetzt werden.
Die Markoffkette $X(n)$ gibt an, wie viele Reservelampen am Ende des Tages noch übrig sind.

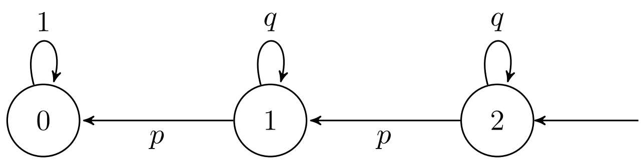
a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm für $X(n)$ und geben Sie die Übergangsmatrix $\overline{P}$ an.

b) Nach wie vielen Tagen ist zu erwarten, dass keine Reservelampe mehr übrig ist?

c) Bestimmen Sie die Matrix $\overline{P}(k)$ der Übergangswahrscheinlichkeiten k-ter Stufe.

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{P}(k)$. Welche Bedeutung hat das Ergebnis für die Markoffkette?

Lösung

a) 

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}$$

b) Es wird die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 0 ($m_0 = 0$)berechnet:

$$m_1 = 1 + p \cdot m_0 + q \cdot m_1 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = \frac{1}{1-q}(1+0) = p^{-1}$$
$$m_2 = 1 + p \cdot m_1 + q \cdot m_2 \quad \Longrightarrow \quad m_2 = \frac{1}{1-q}(1+p \cdot m_1) = 2p^{-1} \Rightarrow \text{ nach } 2/p \text{ Tagen.}$$

c) Es gilt $\overline{P}(k) = \overline{P}^k$. Dies über vollständige Induktion zu berechnen ist kompliziert, daher:

$$\overline{P}(k) = \overline{P}^k = \begin{pmatrix} p_{00}(k) & p_{01}(k) & p_{02}(k) \\ p_{10}(k) & p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{20}(k) & p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{pmatrix}$$

- Es werden nie Ersatzlampen hinzukommen. Daher ist es unmöglich mit k Schritten von Zustand 0 nach 1 bzw. 2 oder von Zustand 1 zu 2 zu gelangen. $p_{01}(k) = p_{02}(k) = p_{12}(k) = 0$. Da eine stochastische Matrix vorliegt, gilt $p_{00}(k) = 1 - p_{01}(k) - p_{02}(k) = 1$.
- Die Wahrscheinlichkeit in Zustand 1 oder 2 zu verbleiben ist:

$$P\big(\text{„keine Ersatzlampe über } k \text{ Tage benötigt“} \;\big|\; \text{„Ersatzlampen vorhanden“}\big)$$
$$= p_{11}(k) = p_{22}(k) = q^k \quad \Longrightarrow \quad p_{10}(k) = 1 - q^k \quad \left(= \sum_{n=0}^{k-1} pq^n \right)$$

- Wird in k Schritten genau eine Ersatzlampe benötigt, gilt:

$$P\big(\text{„eine Ersatzlampe über } k \text{ Tage benötigt“} \;\big|\; \text{„zwei Ersatzlampen vorhanden“}\big)$$
$$= p_{21}(k) = \binom{k}{1} p^1 q^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad p_{20}(k) = 1 - kpq^{k-1} - q^k \quad \left(= \sum_{n=0}^{k-1} np^2 q^{n-1} \right)$$

d) Wegen $q = 1 - p < 1$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \overline{P}(k) = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^k & q^k & 0 \\ 1 - q^{k-1}(kp - q) & kpq^{k-1} & q^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis bestätigt (siehe auch das Zustandsdiagramm), dass Zustand 0 absorbierend ist. Es ist unausweichlich, dass alle Ersatzlampen verbraucht werden.

Aufgabe 6

Ein Schimpanse hat zwei Urnen vor sich: Urne 1 enthält drei weiße und zwei schwarze, Urne 2 eine weiße, zwei grüne und zwei rote Kugeln. Über das Verhalten des Schimpansen ist bekannt, dass er mit der Wahrscheinlichkeit p in die erste und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ in die zweite Urne greift.

a) Wie groß ist in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit, dass der Schimpanse eine weiße Kugel zieht?

b) Warum ist es nicht möglich, dass er durch zufälliges Ziehen einer Kugel in mindestens zwei Dritteln aller Fälle eine weiße Kugel zieht?

Im Folgenden sei $p = 0,7$.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Schimpanse die erste Urne gewählt, falls er eine weiße Kugel gezogen hat?

d) Der Schimpanse darf nun solange Kugeln (ohne Zurücklegen) ziehen, bis er eine rote Kugel wählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er maximal drei Kugeln zieht?

Lösung

a) Definiere $A = \{\text{Schimpanse greift in Urne 1}\}$, $B = \{\text{es wird eine weiße Kugel gezogen}\}$
$P(A) = p$; $P(B|A) = 3/5$; $P(\bar{A}) = 1 - p$; $P(B|\bar{A}) = 1/5$. Damit:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{3}{5}p + \frac{1}{5}(1-p) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}p$$

b) In beiden Urnen ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen kleiner als $2/3$. $P(B)$ liegt immer zwischen diesen beiden Wahrscheinlichkeiten.
($P(B) = 2/3$ führt auf $P(A) > 1$, was unmöglich ist.)

c) Man rechnet:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}7}{0{,}48} = \frac{7}{8} = \underline{0{,}875}$$

d) $A_n = \{\text{im } n\text{-ten Zug wird Urne 1 gewählt}\}$ für $n = 1, ..., 10$.
$R_k = \{\text{bei } k \text{ Kugeln in Urne 2 wird eine der roten gezogen}\}$ für $k \in \{5, 4, 3, 2\}$.
$Z_n = \{\text{das Spiel endet mit der } n\text{-ten gezogenen Kugel}\}$ für $n = 1, ..., 10$.

Die Ereignisse Z_n ergeben sich aus den möglichen Spielverläufen wie folgt:

$$Z_1 = \bar{A}_1 R_5$$
$$Z_2 = \bar{A}_1 \bar{R}_5 \cdot \bar{A}_2 R_4 + A_1 \cdot \bar{A}_2 R_5$$
$$Z_3 = \bar{A}_1 \bar{R}_5 \left(\bar{A}_2 \bar{R}_4 \cdot \bar{A}_3 R_3 + A_2 \cdot \bar{A}_3 R_4\right) + A_1 \left(\bar{A}_2 \bar{R}_5 \cdot \bar{A}_3 R_4 + A_2 \cdot \bar{A}_3 R_5\right)$$

Mit $P(A_n) = 0{,}7$ für alle n und $P(R_k) = 2/k$ ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für möglichen Spieldauern zu $P(Z_1) = 0{,}12$, $P(Z_2) = 0{,}111$ und $P(Z_3) = 0{,}102$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit

$$P(Z_1 + Z_2 + Z_3) = P(Z_1) + P(Z_2) + P(Z_3) = \underline{0{,}333}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \qquad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.5}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.4}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.5}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.6}$$