Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie

12.09.2018

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **08.10.2018** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **16.10.2018** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). Sie erfolgt für alle Teilnehmer von **9:00 bis 10:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **23./24.10.2018** statt.

Aufgabe 1

Sie besitzen drei goldene und drei silberne Münzen, die Sie auf drei Schubladen S_1, S_2, S_3 verteilen wollen. Jede der Schubladen ist groß genug, um alle Münzen zu beinhalten.

a) Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es zur Verteilung der Münzen auf die Schubladen gibt, falls die Münzen jeder Farbe unterscheidbar sind, etwa indem verschiedene Wappen aufgedruckt sind.

b) Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es zur Verteilung der Münzen auf die Schubladen gibt, falls die goldenen und silbernen Münzen *untereinander* nicht unterscheidbar sind.

Nun befinden sich in der ersten Schublade S_1 zwei Goldmünzen, in der zweiten S_2 zwei Silbermünzen und in der dritten S_3 eine goldene und eine silberne Münze. Allerdings sind die Münzen in undurchsichtiges Papier eingewickelt. Sie wählen eine der Schubladen gemäß der Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(S_i), i = 1, 2, 3$ aus und ziehen aus dieser zufällig eine Münze.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine goldene Münze?

Nun werden die Schubladen gleichwahrscheinlich ausgewählt; es ist $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

d) Sie stellen fest, dass Sie beim ersten Ziehen eine goldene Münze gezogen haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die in der von Ihnen ausgewählten Schublade verbliebene Münze ebenfalls golden ist?

e) Die Goldmünzen besitzen einen Wert von 1 000 € und die Silbermünzen von 200 €. Berechnen Sie den mittleren Wert der von Ihnen gezogenen Münze.

Lösung

a) Für jede Münze gibt es 3 Möglichkeiten. Insgesamt folgen somit $3^6 = 729$ Möglichkeiten.

b) Die Problemstellung entspricht dem Ziehen einer Schublade für jede Münze, wobei die Schubladen unterscheidbar sind, aber wieder „zurückgelegt“ werden. Somit ergeben sich die Möglichkeiten:

$$\left|\tilde{C}_3^{(3)}\right| \cdot \left|\tilde{C}_3^{(3)}\right| = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} = 100$$

(Alternativ: Pro Farbe eine Skizze aller Möglichkeiten und Multiplizieren aufgrund der Unabhängigkeit)

c) Ist S_i das Ereignis die i-te Schublade zu wählen, so folgt:

$$\begin{aligned} P(\mathrm{G}) &= P(\mathrm{G}|S_1)P(S_1) + P(\mathrm{G}|S_2)P(S_2) + P(\mathrm{G}|S_3)P(S_3) \\ &= 1p_1 + 0p_2 + \frac{1}{2}p_3 = p_1 + \frac{p_3}{2} \end{aligned}$$

d) Durch Satz von Bayes folgt:

$$P(S_1|\mathrm{G}) = \frac{P(\mathrm{G}|S_1)P(S_1)}{P(\mathrm{G})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

e) Durch Rechnung folgt:

$$E(\text{Wert}) = 1\,000€ \cdot P(\mathrm{G}) + 200€ \cdot (1 - P(\mathrm{G})) = 600€$$

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ mit Ereignissen $A, B \in \mathcal{B}$.

a) Zeigen Sie die Abschätzung $B \subset A \implies P(B) \leq P(A)$.

b) Begründen Sie den Zusammenhang $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

c) Weisen Sie den Zusammenhang

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B})$$

nach.

Hinweis: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Die Ereignisse besitzen nun die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/3$.

d) Verwenden Sie die bisherigen Resultate zum Nachweis von:

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Lösung

a) Aus $B \subset A$ folgt $A = B + (A \setminus B)$. Da die Mengen disjunkt sind folgt $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$ und wegen $P(A \setminus B) \geq 0$ die Behauptung.

b) Wegen $A \cap B \subset A$ bzw. $A \cap B \subset B$ folgt $P(A \cap B) \leq P(A)$ bzw. analog für B. Daraus folgt die Aussage.

c) Es ist:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \big(P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})\big) \\ &= 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &\geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \end{aligned}$$

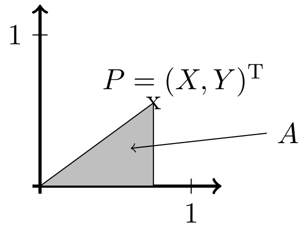
Der letzte Schritt ist korrekt, da $P(\overline{A} \cap \overline{B}) \geq 0$ ist.

d) Mit a) folgt $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$ und damit die rechte Ungleichung.

Für die linke Ungleichung folgt mit Teilaufgabe c): $P(A \cap B) \geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) = 1 - 1/4 - 2/3 = 1/12$.

Aufgabe 3

Gegeben sind zwei unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen $X, Y \sim \mathcal{U}[0,1]$. Aus diesen bilden Sie den Punkt $P = (X,Y)^{\mathrm{T}}$ und daraus zusammen mit $(0,0)^{\mathrm{T}}$ und $(X,0)^{\mathrm{T}}$ ein Dreieck, vgl. Skizze.



Die Fläche des hierbei entstehenden Dreiecks wird durch die Zufallsvariable A beschrieben.

a) Berechnen Sie die mittlere Fläche des Dreiecks.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_A(a)$ der Zufallsvariablen A.

c) Bestimmen Sie die Kovarianz $\operatorname{cov}(X, A)$ zwischen der X-Komponente und der Fläche A.

Nun wird der Punkt P zu $P = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})^{\mathrm{T}}$ festgehalten. Die Verbunddichte $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ beschreibt eine Gleichverteilung auf dem neuen Dreieck.

d) Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig sind.

e) Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_{X_1|X_2=x_2}(x_1|X_2 = x_2)$.

Lösung

a) Man rechnet:

$$E(A) = E\left(\frac{1}{2}XY\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

b) Über den Transformationssatz folgt:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}XY \\ Y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2A}{B} \\ B \end{pmatrix} \implies \det(\mathcal{J}) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{b} & -\frac{2a}{b^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{b}$$

Für die Bilddichte ergibt sich

$$f_{A,B}(a,b) = \frac{2}{b} f_{X,Y}\left(\frac{2a}{b}, b\right) = \frac{2}{b} 1\left\{0 \leq \frac{2a}{b} \leq 1, 0 \leq b \leq 1\right\}$$

und damit:

$$f_A(a) = \int_{2a}^{1} \frac{2}{b}\,\mathrm{d}b = -2\ln(2a),\ 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

c) Für die Kovarianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X, A) &= E((X - E(X))(A - E(A))) = E(XA) - E(X)E(A) \\ &= E\left(X\frac{1}{2}XY\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{8} = \frac{1}{2}E(X^2)E(Y) - \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

d) Da der Bereich nicht rechteckig ist, sind die ZV nicht unabhängig.

e) Für festes x_2 ist X_1 gleichverteilt auf $[x_2, \frac{3}{4}]$. Es folgt:

$$f_{X_1|X_2=x_2}(x_1|X_2 = x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{3}{4}-x_2}, & x_2 \leq x_1 \leq \frac{3}{4} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Aufgabe 4

In einem landwirtschaftlichen Betrieb wird Mais angebaut. Aus Erfahrung weiß der Landwirt, dass das Gewicht G eines Maiskolbens den Erwartungswert $\mu = 180$ g und die Standardabweichung $\sigma = 15$ g besitzt. Zudem seien die Gewichte der Maiskolben als voneinander unabhängig angenommen.

a) Ein Kunde möchte 1 Tonne Maiskolben kaufen. Wie viele Maiskolben muss der Landwirt mindestens liefern, damit das Zielgewicht mit höchstens 1 % Wahrscheinlichkeit unterschritten wird?

Zur Vereinfachung modelliert der Landwirt das Gewicht G eines Maiskolbens als normalverteilt mit oben aufgeführten Parametern.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Maiskolben zwischen 170 g und 200 g?

c) Der Anteil der Maiskörner am Gesamtgewicht eines Maiskolbens beträgt 42 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegen die Körner eines Maiskolbens mehr als 80 g?

Bei einer zweiten Sorte Maiskolben sei das Gewicht ebenfalls normalverteilt, allerdings mit der Standardabweichung $\sigma_2 = 8$ g und unbekanntem Erwartungswert μ_2.

d) Weiterhin gelte $P(G_2 > 90 \text{ g}) = 0.95$. Bestimmen Sie μ_2.

Lösung

a) Die Anzahl der Maiskolben ist ungefähr $K \approx 1$ Tonne/180 g. Da K „groß“ ist, folgt mittels des zentralen Grenzwertsatzes $G_1 + \cdots + G_K \sim \mathcal{N}(K\mu, K\sigma^2)$. Damit:

$$\begin{aligned} 0.01 &\overset{!}{\geq} P(G_1 + \cdots + G_K < 1000 \text{ kg}) = P\left(\frac{G_1 + \cdots + G_K - K\mu}{\sqrt{K}\sigma} < \frac{1000 \text{ kg} - K \cdot 180 \text{ g}}{\sqrt{K} \cdot 15 \text{ g}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{1000 \text{ kg} - K \cdot 180 \text{ g}}{\sqrt{K} \cdot 15 \text{ g}}\right) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1000 \text{ kg} - K \cdot 180 \text{ g}}{\sqrt{K} \cdot 15 \text{ g}} \overset{!}{\leq} -2.34,$$

daraus $K \geq 5\,570.1$ und schließlich $K \geq 5\,571$.

b) Es ist:

$$\begin{aligned} P(170 \text{ g} < G \leq 200 \text{ g}) &= P\left(\frac{170 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}} < \frac{G - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}} \leq \frac{200 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \left(1 + \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) \\ &= 0.9098 - (1 - 0.7453) = 0.6551 \end{aligned}$$

c) Bezeichnet G_{K} das Gewicht der Körner, so folgt:

$$\begin{aligned} P(G_{\text{K}} > 80 \text{ g}) &= 1 - P(G \leq 80 \text{ g}/0.42) = 1 - \Phi\left(\frac{190.48 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.6984) \approx 0.242 \end{aligned}$$

d) Man rechnet aus der Bedingung, dass:

$$
\begin{aligned}
0.95 &= 1 - P(G_2 \leq 90 \text{ g}) = 1 - P\left(\frac{G_2 - \mu_2}{8 \text{ g}} \leq \frac{90 \text{ g} - \mu_2}{8 \text{ g}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{90 \text{ g} - \mu_2}{8 \text{ g}}\right)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{90 \text{ g} - \mu_2}{8 \text{ g}} \approx -1.66 \implies \mu_2 = 103.28 \text{ g}$$

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, X_2 mit den Dichten

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < a \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass $f_{X_1}(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Erzeugen Sie aus X_2 die standardisierte Zufallsvariable Z mit $E(Z) = 0$ und $D^2(Z) = 1$.

c) Leiten Sie die Dichte von $Y := \sqrt{X_1}$ her. Welche Verteilung besitzt Y?

d) Berechnen Sie die Korrelation $E(X_2 Y)$.

Lösung

a) Durch Integration folgt

$$\int_0^a \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]_0^a = \sqrt{a}$$

und somit $a = 1$.

b) Aus der Vorlesung: $(X_2 - E(X_2))/D(X_2)$ ist standardisiert. Man rechnet:

$$\begin{aligned} E(X_2) &= \int_0^1 x f_{X_2}(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \\ E(X_2^2) &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{5} \\ D^2(X_2) &= \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

Damit ist $\frac{X_2 - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4}{45}}}$ standardisiert.

c) Über den Ansatz:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y \leq y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(\sqrt{X_1} \leq y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(X_1 \leq y^2)$$

folgt

$$f_Y(y) = f_{X_1}(y^2) \cdot 2y = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvariable Y besitzt eine Gleichverteilung auf $(0, 1)$.

d) Da X_1 und X_2 unabhängig sind, sind auch Y und X_2 unabhängig und damit unkorreliert. Es ergibt sich:

$$E(X_2 \cdot Y) = E(X_2) \cdot E(Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Aufgabe 6

Ausgangspunkt ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $X_0, X_1, X_2, \ldots$, wobei jedes X_n eine Zweipunktverteilung auf $\{0, 1\}$ mit $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$ besitzt. Aus diesen werden durch Addition die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0 \\ Y_n &= 2X_n + X_{n-1},\ n \geq 1 \end{aligned}$$

gebildet.

a) Begründen Sie, dass $(Y_n)_n$ eine Markoff-Kette bildet.

b) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markoff-Kette $(Y_n)_n$ und zeichnen Sie den Übergangsgraphen für $(Y_n)_n$.

Im Folgenden sei $p = 1/2$.

c) Berechnen Sie für alle Zustände i und j die Wahrscheinlichkeiten, in drei Schritten von Zustand i zu Zustand j zu kommen.

d) Wie lauten die Zustandswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $k = 100$, wenn für die Anfangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(0) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ gilt?

Lösung

a) Es ist $Y_{n+1} = 2X_{n+1} + X_n$. (X_i, X_{i-1}) bilden den Zustand, der nicht mehr von einem vorhergehenden Zuständen abhängig ist. Daraus folgt die Markoff-Eigenschaft für Y.

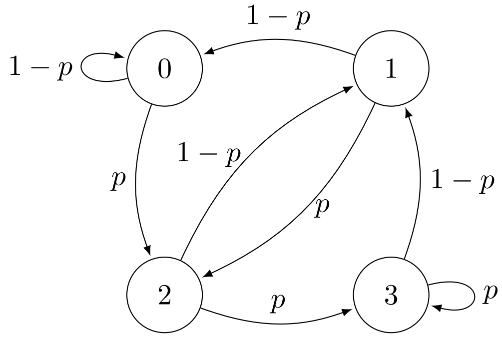
b) Mittels „Durchspielen“ der Möglichkeiten ergibt sich

$$P(Y_n = j | Y_{n-1} = i) = \begin{cases} p, & 0 \to 2, 1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 3 \\ 1 - p, & 0 \to 0, 1 \to 0, 2 \to 1, 3 \to 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

Der Zustandsgraph ergibt sich zu: keine Punkte für unendliche Zustandsketten



c) Für die Übergangsmatrizen folgt bei $p = 1/2$:

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^4 = \cdots$$

Somit sind alle drei-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten gleich 0.25.

d) Da alle Potenzen $\mathbf{P}^n$ gleich sind, folgt mit $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(0) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$:

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(n) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(0)\mathbf{P}^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sum_i p_i \\ \sum_i p_i \\ \sum_i p_i \\ \sum_i p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \qquad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \tag{B.6}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.7}$$