Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Dr.-Ing. Holger Jäkel

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

4.9.2019

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **30.9.2019** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **10.10.2019** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG) von 14:00 bis 16:00 Uhr. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **17.10.2019** statt.

Aufgabe 1

In einer Pizzeria stehen dem Pizzabäcker n verschiedene Beläge zur Verfügung. Es sollen alle möglichen Pizzakreationen ausprobiert werden, die mindestens 1, aber maximal 4 Beläge enthalten, wobei jeder Belag nur einmal verwendet wird. Die Reihenfolge der Beläge auf der Pizza spielt in allen nachfolgenden Betrachtungen keine Rolle.

a) Überprüfen Sie, mit welchem minimalen $n \geq 5$ mindestens 40 Pizzakreationen gebacken werden können.

Da die ersten Experimente nicht erfolgreich waren, hat sich der Pizzabäcker entschieden, folgende $n = 7$ Beläge auszuprobieren:

Belag 1:	Salami	Belag 2:	Champignons
Belag 3:	Artischocken	Belag 4:	Schinken
Belag 5:	Paprika	Belag 6:	Steinpilze
Belag 7:	Spinat		

b) Aufgrund von persönlichen Vorlieben möchte der Pizzabäcker Belag 2 und Belag 6 nicht auf derselben Pizza kombinieren.

Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Kombinationen dieser $n = 7$ Beläge mit mindestens 1 Belag und maximal 4 Belägen pro Pizza unter Berücksichtigung der persönlichen Vorlieben des Bäckers.

Da auch dieser Versuch nicht glückte, entschied die Pizzeria, sich auf die Beläge 1-5 zu beschränken und alle möglichen Kombinationen mit mindestens 1 Belag anzubieten.

c) Bestimmen Sie die Anzahl an Kombinationen in diesem Fall.

Einer der Beläge, die Salami, ist leider verdorben.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Testesser, der eine zufällig ausgewählte Pizza bestellt, die verdorbene Salami bekommt.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter k Testessern mindestens einer eine Pizza mit verdorbener Salami bestellt. Wir nehmen dabei an, dass die Testesser jeweils unabhängig ihre Auswahl treffen.

Wie groß muss k mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Pizza mit verdorbener Salami unter der Bestellung ist, größer als 95% ist?

Lösung

a) Für die Anzahl an Kreationen ergibt sich

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} n = 5: &\quad \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = 30 \\ n = 6: &\quad \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = 56 \end{aligned}$$

Es sind also mindestens $n = 6$ verschiedene Beläge notwendig.

b) Die Anzahl möglicher Kombinationen setzt sich zusammen aus der Anzahl möglicher Kombinationen mit Belag 2 (C_1), der Anzahl möglicher Kombination mit Belag 6 (C_2), sowie der Anzahl möglicher Kombination ohne Belag 2 und ohne Belag 6) (C_3). Dabei ist

$$C_1 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 26$$

da wir aus 5 Belägen wählen können (alle außer 2 und 6) und 1 Belag schon vorgegeben ist (2). Daher gibt es insgesamt auch nur 3 Beläge die maximal auswählbar sind. Analog dazu haben wir

$$C_2 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 26$$

da wir aus 5 Belägen wählen können (alle außer 2 und 6) und 1 Belag schon vorgegeben ist (6). Daher gibt es insgesamt auch nur 3 Beläge die maximal auswählbar sind. Für den letzten Fall gilt

$$C_2 = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 30$$

Insgesamt ergeben sich also $C_1 + C_2 + C_3 = 82$ verschiedene Pizzakreationen.

c) Es ergibt sich

$$C = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} - 1 = 2^n - 1 = 31$$

d) **Variante 1**: Durch Beobachtung sehen wir, dass alle $2^n - 1$ Möglichkeiten auf der Karte stehen. Diese entsprechen allen $2^n - 1$ möglichen Bitmustern der Länge n, wobei eine "1" bedeutet, dass der Belag verwendet wird. Das Null-Bitmuster wird dabei nicht verwendet. An jeder Position des Bitmusters, d.h. für jeden Belag, gibt es genau $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ Möglichkeiten an denen eine "1" steht, und das bei insgesamt $2^n - 1$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, eine Pizza mit verdorbener Salami auszuwählen beträgt dementsprechend

$$P(\text{verdorben}) = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{16}{31} \approx 0.5161$$

Variante 2: Durch Zählen erhalten wir

$$P(\text{verdorben}) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} = \frac{16}{31}$$

e) Die Wahrscheinlichkeit, dass k Testesser j verdorbene Pizzen bestellen, ergibt sich durch die Binomialverteilung

$$P(j \text{ verdorben}) = \binom{k}{j} p_{\text{v}}^j (1 - p_{\text{v}})^{k-j}$$

wobei $p_{\text{v}} = \frac{16}{31}$. Die Wahrscheinlichkeit dass mindestens eine Pizza mit verdorbener Salami bestellt ist:

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens 1 verdorben}) &= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} p_{\text{v}}^j (1 - p_{\text{v}})^{k-j} \\ &= 1 - (1 - p_{\text{v}})^k \end{aligned}$$

Es soll nun $P(\text{mindestens 1 verdorben}) \geq 0.95$ gelten. Umformen und Auflösen ergibt:

$$\begin{aligned} & 1 - (1 - p_{\text{v}})^k \geq 0.95 \\ \Rightarrow \qquad & k \geq \frac{\ln(1 - 0.95)}{\ln(1 - 16/31)} \approx 4.12 \end{aligned}$$

Sie benötigen also eine Gruppe von mindestens 5 Personen.

Aufgabe 2

Jedes Jahr erkranken in Deutschland von 100.000 Einwohnern 300 an einem bestimmten Typ von Hautkrebs. Unter den Erkrankten sind 30% Frauen.
Die (lückenhafte) Tabelle 1 zeigt, wie alt die Betroffenen zum Zeitpunkt der Erkrankung in Abhängigkeit von ihrem Geschlecht (W: weiblich, $\overline{W}$: nicht weiblich) sind.

Alter in Jahren	0-20	20-40	40-60	60-80	>80
W	?	?	0,4	0,35	0,05
$\overline{W}$	0,05	0,1	0,3	0,4	0,15

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Altersgruppen bei Auftreten von Hautkrebs nach Geschlecht.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten, wenn das Krankheitsrisiko für Frauen zwischen 20 und 40 Jahren drei Mal so hoch ist wie für Frauen, die jünger als 20 Jahre sind.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine erkrankte Person weiblich und älter als 40 Jahre *oder* nicht weiblich und älter als 60 Jahre ist.

c) Geben Sie die Verteilungsfunktion an, die das Alter erkrankter Personen unabhängig von deren Geschlecht beschreibt.

Zur Prävention schwerer Krankheitsverläufe wird von einem Hautarzt bei der jährlichen Vorsorgeuntersuchung ein Test durchgeführt. Dieser stellt im Mittel bei 8 von 100 Personen Anzeichen von Hautkrebs fest. Dabei erkennt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, wenn ein Patient tatsächlich krank ist.

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einer gesunden Person fälschlicherweise Hautkrebs feststellt?

Lösung

a) Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, fehlt eine Wahrscheinlichkeitsmasse von 0,2. Mit der gegebenen Randbedingung ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 0,05 für die Erkrankung unter 20 Jahren und 0,15 für eine Erkrankung in einem Alter zwischen 20 und 40 Jahren.

b) Man berechnet $P = P(W \wedge \text{„älter als 40“}) + P(\overline{W} \wedge \text{„älter als 60“})$ gemäß

$$P(W \wedge \text{„älter als 40“}) = P(W) \cdot P(\text{„älter als 40“}|W) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24$$

und analog

$$P(\overline{W} \wedge \text{„älter als 60“}) = P(\overline{W}) \cdot P(\text{„älter als 60“}|\overline{W}) = 0{,}7 \cdot 0{,}55 = 0{,}385,$$

so dass $P = 0{,}24 + 0{,}385 = 0{,}625$ folgt.

c) Die geschlechterunabhängigen Einzelwahrscheinlichkeiten ergeben sich zu

$$P(\text{Altersgruppe}) = P(W)P(\text{Altersgruppe}|W) + P(\overline{W})P(\text{Altersgruppe}|\overline{W}).$$

Für die Dichte gilt also

$$P(\text{Altersgruppe}) = [0{,}05; 0{,}115; 0{,}33; 0{,}385; 0{,}12],$$

die durch Integration/Summieren in die Verteilungsfunktion überführt wird:

$$F(\text{Altersgruppe} \leq x) = [0{,}05; 0{,}165; 0{,}495; 0{,}88; 1]$$

d) Gesucht ist mit $A =$ „Test ist auffällig“ und $G =$ „Person ist gesund“ die Wahrscheinlichkeit $P(A|G)$. Im Text gegeben ist $P(A) = \frac{8}{100} = 0{,}08$, $P(\overline{G}) = \frac{300}{100000} = 3 \cdot 10^{-3}$ und $P(A|\overline{G}) = 0{,}95$. Man berechnet mit dem Satz von Bayes:

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \frac{(1 - P(\overline{G}|A))P(A)}{1 - P(\overline{G})}$$

mit

$$P(\overline{G}|A) = \frac{P(A|\overline{G})P(\overline{G})}{P(A)} = \frac{57}{1600},$$

so dass folgt:

$$P(A|G) = \frac{(1 - \frac{57}{1600}) \cdot 0.08}{1 - 3 \cdot 10^{-3}} = \frac{1543}{19940} \approx 0{,}077$$

Aufgabe 3

Gegeben sind N unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$, die jeweils eine Exponentialverteilung $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ besitzen. Aus diesen entsteht durch Aufsummieren die Zufallsvariable

$$Y := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Sie finden in der Bibliothek in [komisches altes Buch] die Aussage, dass es sich um eine Erlang-Verteilung handelt und die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y durch

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^N}{(N-1)!} y^{N-1} \mathrm{e}^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Da Sie der Quelle [komisches altes Buch] nicht vollständig vertrauen, beschließen Sie, den Fall $N = 2$ selbst zu untersuchen. Zeigen Sie durch Anwendung des Faltungssatzes, dass obige Dichte im Fall $N = 2$ und somit $Y = X_1 + X_2$ korrekt ist.

b) Begründen und weisen Sie rechnerisch nach, dass für beliebiges N durch $f_Y(y)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist.

c) Berechnen Sie für beliebiges N den Erwartungswert und die Varianz von Y. Begründen Sie Ihre Rechenschritte.

Im Folgenden sei $N = 100$ und $\lambda = 1$.

d) Berechnen oder approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y einen Wert zwischen 112 und 222 annimmt. (Werte inklusive!)

Lösung

a) Nach Faltungssatz entsteht die Dichte einer Summe unabhängiger Zufallsvariablen als Faltung der Dichten. Es folgt:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(\tau) f_{X_2}(y-\tau) \mathrm{d}\tau \overset{y \geq 0}{=} \int_0^y \lambda \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(y-\tau)} \mathrm{d}\tau \\ &= \lambda^2 \int_0^y \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}\tau = \lambda^2 y \mathrm{e}^{-\lambda y} = \frac{\lambda^2}{(2-1)!} y^{2-1} \mathrm{e}^{-\lambda y}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Für $y < 0$ wird die Faltung zu 0. Für den Fall $N = 2$ ist das Ergebnis somit nachgeprüft.

b) Bei $y \geq 0$ ist $y^{N-1} \geq 0$ und somit $f_Y(y) \geq 0$ für alle y.

Zudem ist:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_Y(y) \mathrm{d}y &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^N}{(N-1)!} y^{N-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \frac{\lambda^N}{(N-1)!} \int_0^{\infty} y^{N-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\ &\overset{(*)}{=} \frac{\lambda^N}{(N-1)!} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} = 1, \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Gleichung (C.6) aus dem Anhang verwendet wurde.

c) Man rechnet (ohne Verwendung der Dichte)

$$E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_N) = E(X_1) + \cdots + E(X_N) = NE(X_1) = \frac{N}{\lambda}$$

sowie

$$D^2(Y) = D^2(X_1 + \cdots + X_N) \overset{(*)}{=} D^2(X_1) + \cdots + D^2(X_N) = ND^2(X_1) = \frac{N}{\lambda^2}.$$

Hierbei ist in $(*)$ die Unabhängigkeit der X_i notwendig.

d) Die Zahlenwerte motivieren die Verwendung des ZGWS. Mit diesem und Teilaufgabe a) folgt aus $E(Y) = 100$, $D^2(Y) = 100$:

$$\begin{aligned} P(112 \leq Y \leq 222) &= P\left(\frac{112 - E(Y)}{D(Y)} \leq \frac{Y - E(Y)}{D(Y)} \leq \frac{222 - E(Y)}{D(Y)}\right) \\ &= P\left(1,2 \leq \frac{Y - E(Y)}{D(Y)} \leq 12,2\right) \\ &\approx \Phi(12,2) - \Phi(1,2) \approx 1 - 0,885 = 0,115 \end{aligned}$$

Beachte: Da 12,2 größer als jeder tabellierte Wert ist, wird der obere Wert zu 1 gesetzt.

Aufgabe 4

Sie analysieren die Spannungsamplitude eines nachrichtentechnischen Systems in Volt und modellieren diese als $A \sim \mathcal{N}(1; 0{,}01)$.

Hinweis: Zur Vereinfachung werden im Folgenden die physikalischen Einheiten der untersuchten Größen vernachlässigt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Spannung größer als 1,1 auftritt.

b) Aus der Spannung berechnen Sie die Momentanleistung $P = A^2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_P(p)$.

c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_P(p)$.

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Zur Analyse des Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnisses eines Kommunikationssystems modellieren Sie die Signalleistung gemäß $P \sim \mathrm{Exp}(\lambda_P)$ und die Rauschleistung als $N \sim \mathrm{Exp}(\lambda_N)$. Die Signal- und Rauschleistung seien hierbei unabhängig.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte des Signal-zu-Rausch-Leistungsverhältnisses $S = P/N$.

Lösung

a) Man rechnet direkt:

$$\begin{aligned} P(A > 1{,}1) &= 1 - P(A \leq 1{,}1) = 1 - P\left(\frac{A-1}{\sqrt{0{,}01}} \leq \frac{1{,}1-1}{\sqrt{0{,}01}}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{A-1}{\sqrt{0{,}01}} \leq 1\right) = 1 - 0{,}841 = 0{,}159 \end{aligned}$$

b) Aus dem Ansatz der Verteilungsfunktion mit $p \geq 0$ (Leistung nicht negativ)

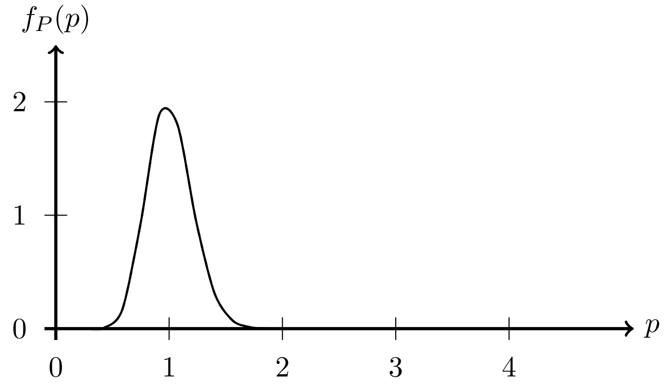
$$F_P(p) = P(P \leq p) = P(|A| \leq \sqrt{p}) = P(A \leq \sqrt{p}) - P(A \leq -\sqrt{p})$$

folgt durch Ableiten und mit $\mu_A = 1$ und $\sigma_A^2 = 0{,}01$:

$$\begin{aligned} f_P(p) &= \frac{1}{2\sqrt{p}} f_A(\sqrt{p}) + \frac{1}{2\sqrt{p}} f_A(-\sqrt{p}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_A^2 p}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{p}-\mu_A)^2}{2\cdot\sigma_A^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi\sigma_A^2 p}} \exp\left(-\frac{(-\sqrt{p}-\mu_A)^2}{2\cdot\sigma_A^2}\right) \end{aligned}$$

Beachte: Da die Verteilung von A nicht zu null symmetrisch ist, können die Terme nicht zusammengefasst werden. Da der zweite Term aber um -1 zentriert ist und eine sehr kleine Varianz besitzt, leistet er für positive p kaum einen Beitrag.

c) Aus obiger Teilaufgabe folgt durch Überlagerung der Dichten:



Beachte: Als gestrichelte Linie ist die Funktion aufgezeichnet, die durch Vernachlässigung des zweiten Terms entsteht. Offensichtlich ist diese nicht unterscheidbar.

d) Mit

$$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{N} \\ N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ST \\ T \end{pmatrix}$$

folgt für die Jacobi-Determinante

$$|\mathcal{J}| = \left| \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |t| = t$$

und somit aus dem Transformationssatz und der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} f_{(S,T)}(s,t) &= t \cdot f_{(P,N)}(st,t) = t f_P(st) f_N(t) \\ &= t \cdot \lambda_P \mathrm{e}^{-\lambda_P st} \cdot 1\{st \geq 0\} \cdot \lambda_N \mathrm{e}^{-\lambda_N t} \cdot 1\{t \geq 0\} \\ &= t \cdot \lambda_P \lambda_N \mathrm{e}^{-(\lambda_P s + \lambda_N)t} \cdot 1\{s \geq 0, t \geq 0\} \end{aligned}$$

Durch Bildung der Randdichte ergibt sich für $s \geq 0$:[1]

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_0^\infty f_{(S,T)}(s,t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t \cdot \lambda_P \lambda_N \mathrm{e}^{-(\lambda_P s + \lambda_N)t} \mathrm{d}t \\ &= \lambda_P \lambda_N \int_0^\infty t \mathrm{e}^{-(\lambda_P s + \lambda_N)t} \mathrm{d}t \\ &\overset{(C.6)}{=} \lambda_P \lambda_N \frac{1}{(\lambda_P s + \lambda_N)^2} \end{aligned}$$

[1] Die Berechnung ist auch mit (C.2) möglich.

Aufgabe 5

Während eines Arbeitstages durchläuft die typische Forscherin am CEL die folgenden Zustände:

- S1: Konzentriertes Arbeiten
- S2: Unkonzentriertes Arbeiten
- S3: Kaffeepause

Der Tag beginnt um 8 Uhr mit konzentriertem Arbeiten und endet um 17 Uhr. Die Zustandsübergänge erfolgen alle 15 Minuten. Dabei liegt die Wahrscheinlichkeit, nach 15 Minuten konzentriert zu bleiben, bei $P_1 = 0{,}7$. Klappt das nicht, wird die nächsten 15 Minuten unkonzentriert gearbeitet. Ist die Forscherin unkonzentriert, arbeitet sie mit Wahrscheinlichkeit $P_2 = 0{,}4$ unkonzentriert weiter, ansonsten macht die unkonzentrierte Forscherin eine Kaffeepause. Danach arbeitet sie weiter und ist mit $P_3 = 0{,}8$ wieder konzentrierter als vor der Pause.

a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Forscherin bis *kurz vor* 9:30 Uhr schon mindestens zwei Tassen Kaffee getrunken hat?

c) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Forscherin zwischen 8:30 Uhr und 8:45 Uhr eine Kaffeepause macht.

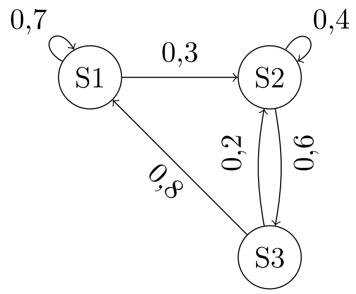
d) Berechnen Sie den stationären Zustand dieses Prozesses. Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl getrunkener Tassen Kaffee ab 12 Uhr bis Feierabend unter der Annahme, dass der stationäre Zustand um 12 Uhr näherungsweise erreicht ist.

Lösung

a) Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Übergangsgraph:



b) Man überlegt sich alle möglichen Pfade durch den Zustandsgraphen, die bei S1 beginnen und mindestens zwei Mal S3 enthalten:

8:00	8:15	8:30	8:45	9:00	9:15	P
S_1	S_2	S_3	S_2	S_3	S_1 o. S_2	$\frac{27}{1250}$
S_1	S_1	S_2	S_3	S_2	S_3	$\frac{189}{12500}$
S_1	S_2	S_2	S_3	S_2	S_3	$\frac{27}{3125}$
S_1	S_2	S_3	S_1	S_2	S_3	$\frac{81}{3125}$
S_1	S_2	S_3	S_2	S_2	S_3	$\frac{27}{3125}$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich als die Summe der unabhängigen Einzelwahrscheinlichkeiten, die durch Multiplikation der Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt werden können: $P_{\text{tot}} = \frac{999}{12500} \approx 8\,\%$

c) Man berechnet den Zustandsvektor nach zwei Übergängen:

$$\mathbf{p}_2^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^2 = (1\ 0\ 0) \cdot \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 49 & 33 & 18 \\ 48 & 28 & 24 \\ 56 & 32 & 12 \end{pmatrix} = (0{,}49\ 0{,}33\ 0{,}18)$$

Die Forscherin befindet sich also in 18 % der Fälle im angegebenen Zeitraum in der Kaffeepause.

d) Mit dem Ansatz, dass sich von einem zum nächsten Zeitschritt die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht mehr ändern, lässt sich der folgende Ansatz aufstellen:

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}} (\mathbf{P} - \mathbf{I}_3) = (p_1\ p_2\ p_3) \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 \\ 8 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich direkt das folgende LGS ableiten:

$$\begin{aligned} 0 &= -3p_1 + 8p_3 && \Rightarrow p_1 = \frac{8}{3} p_3 \\ 0 &= +3p_1 - 6p_2 + 2p_3 && \\ 0 &= +6p_2 - 10p_3 && \Rightarrow p_2 = \frac{5}{3} p_3 \end{aligned}$$

Aus

$$\mathbf{p} = \left(\tfrac{8}{3}\ \tfrac{5}{3}\ 1\right) \cdot p_3 \text{ mit } \sum_i p_i = 1$$

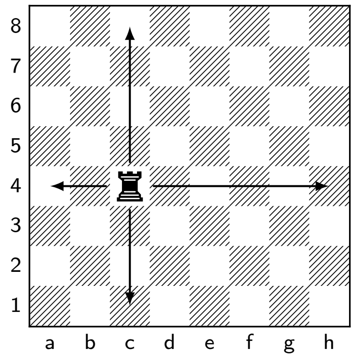
ergibt sich direkt der gesuchte stationäre Zustand mit $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{2}\ \frac{5}{16}\ \frac{3}{16})$. In einem Zeitraum von 5 Stunden und dementsprechend 20 Zeitschritten ergibt sich ein durchschnittlicher Kaffeekonsum von $20 \cdot \frac{3}{16} = 3{,}75$ Tassen.

Aufgabe 6

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Betrachtet wird die Ergebnismenge eines Würfels gemäß $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. Geben Sie die kleinste σ-Algebra an, welche die Ereignisse $\{1\}, \{3, 5\}$ enthält.

b) Gegeben ist ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern. Auf dieses sollen n nicht unterscheidbare Türme so gestellt werden, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können. Ein Turm kann hierbei alle Figuren in seiner horizontalen und in seiner vertikalen Reihe schlagen. Zur Veranschaulichung ist im Folgenden der Fall $n = 8$ dargestellt.



Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es in Abhängigkeit von n gibt, die Türme so zu stellen, dass sie sich nicht gegenseitig schlagen können.

c) Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit $E(X) = 0$ und $\sigma_X^2 = D^2(X) < \infty$. Weisen Sie nach, dass für $Y = aX + b, a \neq 0$, gilt:

$$\rho_{XY} \in \{-1, +1\}.$$

d) Erläutern Sie den Begriff *Ergodizität* und erklären Sie dessen Bedeutung für die ingenieurwissenschaftliche Arbeit.

Lösung

a) Durch „konstruktives Vorwärtsrechnen“ folgt:

$$\begin{aligned}\sigma(\{\{1\}, \{3, 5\}\}) = \{&\emptyset, \{1\}, \{3, 5\}, \Omega,\\ &\{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 6\},\\ &\{1, 3, 5\},\\ &\{2, 4, 6\},\\ &\}\end{aligned}$$

b) Wir belegen sukzessive die horizontalen Reihen („Zeilen“). Somit gibt es in der ersten Zeile n Möglichkeiten, in der zweiten Zeile $(n-1)$ Möglichkeiten etc. Die Anzahl der Möglichkeiten ist somit $n!$.

c) Für $\rho_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y)/\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}$ rechnet man:

$$\begin{aligned}E(XY) &= E(X(aX + b)) = E(aX^2) + bE(X) = aE(X^2) = aD^2(X)\\ D^2(Y) &= D^2(aX + b) = a^2D^2(X)\end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}} = \frac{aD^2(X)}{\sqrt{D^2(X)a^2D^2(X)}} = \frac{a}{|a|} = \pm 1$$

d) Unter Ergodizität versteht man die Eigenschaft eines schwach stationären stochastischen Prozesses, Scharmittelwerte durch Zeitmittelwerte bestimmen zu können.

Für die praktische Anwendung ist dies von großer Bedeutung, da sich in der Realität nur Zeitmittelwerte bestimmen/messen lassen, aus denen man möglichst Rückschlüsse auf den Prozess ziehen möchte.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \qquad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.5}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.4}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.5}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.6}$$