Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie

15.09.2021

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **13.10.2021** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **20.10.2021** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **28.10.2021** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) Gegeben ist ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ und zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{B}$. Es ist bekannt, dass $P(A) = 0{,}7$ und $P(B) = 0{,}7$ ist. Wie groß ist *mindestens* die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gleichzeitig eintreten? *(3 Punkte)*

Hinweis: Verwenden Sie als Ansatz $P(A \cup B) = \dots$

b) Gegeben ist eine exponentialverteilte Zufallsgröße $Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X := \sqrt{Y}$. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ *aus der Verteilungsfunktion.* *(3 Punkte)*

c) Für $\alpha \in [-1, 1]$ ist die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1 + \alpha(1 - 2x)(1 - 2y), & \text{für } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Zufallsvariablen X und Y. *(5 Punkte)*

d) Gegeben ist eine Zufallsvariable X mit der Verteilung

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Rechnen Sie nach, dass für $j > 0$ und $k > 0$ stets

$$P(X = j + k | X > j) = P(X = k)$$

gilt. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Gesucht ist eine Abschätzung/Rechnung für $P(A \cap B)$. Bekannt ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Damit folgt:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge P(A) + P(B) - 1 = 0{,}4.$$

b) Für die Verteilungsfunktion von X folgt:

$$F_X(x) = P\left(X \le x\right) = P\left(Y^{\frac{1}{\alpha}} \le x\right) = P\left(Y \le x^{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}}, & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich durch Ableiten zu:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \overset{x \ge 0}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}}\right) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} \overset{\alpha = 2}{=} \begin{cases} 2\lambda x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x^2}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

c) Zu Beginn bestimmt man die Randdichte $f_X(x)$ im Bereich $0 \le x \le 1$ durch Integration:

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 1 + \alpha - 2\alpha x - 2\alpha y + 4\alpha x y\,\mathrm{d}y = 1 + \alpha - 2\alpha x - \alpha + 2\alpha x = 1.$$

Somit ist $f_X(x) = \mathbb{1}\{0 \le x \le 1\}$, d.h. $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ besitzt eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Aus Symmetriegründen ist die Randdichte von Y ebenfalls eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Damit ist $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$, $V(X) = V(Y) = \frac{1}{12}$.

Es fehlt noch:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (1 + \alpha - 2\alpha x - 2\alpha y + 4\alpha xy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y\alpha - \frac{2}{3}\alpha y - \alpha y^2 + \frac{4}{3}\alpha y^2\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{9}\alpha \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{36}\alpha
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{36}\alpha - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{12}\frac{1}{12}}} = \frac{\alpha}{3}$$

d) Zuerst wird die bedingte Wahrscheinlichkeit aufgelöst und liefert:

$$P(X = j + k | X > j) = \frac{P(X = j + k, X > j)}{P(X > j)} = \frac{P(X = j + k)}{P(X > j)} = \frac{(1-p)^{j+k-1}p}{P(X > j)}.$$

Für den Nenner ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(X > j) &= 1 - \sum_{n=1}^{j} (1-p)^{n-1} p = 1 - p \sum_{n'=0}^{j-1} (1-p)^{n'} \\
&\overset{(B.3)}{=} 1 - p\frac{1-(1-p)^j}{1-(1-p)} = 1 - p\frac{1-(1-p)^j}{p} \\
&= (1-p)^j
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$P(X = j + k | X > j) = \frac{(1-p)^{j+k-1}p}{(1-p)^j} = (1-p)^{k-1}p = P(X = k)$$

Alternative Rechnung für den Nenner:

$$\begin{aligned}
P(X > j) &= \sum_{\ell=j+1}^{\infty} (1-p)^{\ell-1} p = p(1-p)^j \sum_{\ell=j+1}^{\infty} (1-p)^{\ell-j-1} \\
&= p(1-p)^j \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = p(1-p)^j \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^j
\end{aligned}$$

Bemerkung: Hierdurch kann bei mehrfacher Beobachtung einer Zweipunktverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer modelliert werden.

Aufgabe 2

Eine Firma entwickelt eine Maschine mit Lebensdauer X in Jahren und Effizienz Y in Prozent. Versuchsreihen haben folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ergeben:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}, & \text{für } x \geq 0, 0 \leq y \leq 10 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f_{(X,Y)}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. *(3 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie! *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die mittlere Lebenserwartung und die mittlere Effizienz der Maschine. *(3 Punkte)*

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Maschine mit einer Lebensdauer von mindestens 7 Jahren eine Effizienz von weniger als α aufweist? *(2 Punkte)*

Die Kosten k der Maschine ergeben sich aus der Lebensdauer und der Effizienz gemäß $k = 7y + \frac{1}{2}x$. Außerdem soll die Lebensdauer nun in Monaten $m = \frac{x}{12}$ gemessen werden.

e) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte $f_{(M,K)}(m,k)$ der Lebensdauer in Monaten und der Kosten. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Zu zeigen: $\int\int f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$ und $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ im Definitionsbereich.

$$\begin{aligned}\int\int f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \int_0^{10} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^\infty \cdot \left[\frac{1}{20}y - \frac{1}{400}y^2\right]_0^{10} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion ist immer positiv, $\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right)$ hat eine Nullstelle bei 10 und ist davor positiv. Damit ist $f_{(X,Y)}(x,y) \geq 0$ für $0 \leq y \leq 10$ und alle $x \geq 0$.

Insgesamt folgt, dass $f_{(X,Y)}(x,y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Zu berechnen: $f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}y$ und $f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_0^{10} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left[\frac{1}{20}y - \frac{1}{400}y^2\right]_0^{10} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \\ f_Y(y) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) \left[-4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\right]_0^\infty = \frac{1}{5} - \frac{1}{50}y\end{aligned}$$

Bei stochastischer Unabhängigkeit muss gelten $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}y\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}y\right) = f_{(X,Y)}(x,y)$$

Also sind X und Y stochastisch unabhängig.

c) Bei $f_X(x)$ handelt es sich um eine Exponentialverteilung mit $\lambda = \frac{1}{4}$. Somit folgen die Erwartungswerte zu:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{\lambda} = 4 \\
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{10} y\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}y\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{10}y^2 - \frac{1}{150}y^3\right]_0^{10} = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

d) Da X und Y stochastisch unabhängig sind, hat die Lebensdauer keinen Einfluss auf die Effizienz und muss hier daher auch nicht beachtet werden. Gesucht ist die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ an der Stelle α.

$$\begin{aligned}
F_Y(\alpha) &= \int_0^{\alpha} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\alpha} \frac{1}{5} - \frac{1}{50}y\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{5}y - \frac{1}{100}y^2\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{5}\alpha - \frac{1}{100}\alpha^2
\end{aligned}$$

e) Gesucht ist $f_{(M,K)}(m,k)$ mit $k = \frac{1}{2}x + 7y$ und $m = \frac{x}{12}$. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
x &= 12m \\
y &= \frac{1}{7}k - \frac{1}{14}x = \frac{1}{7}k - \frac{6}{7}m
\end{aligned}$$

Berechnen der Jacobi-Determinante $\det(J)$:

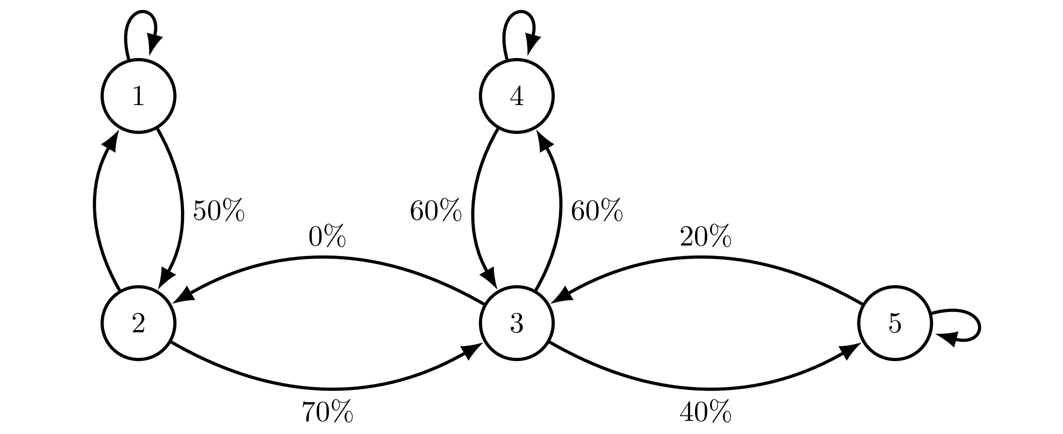
$$\det(J) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial k} \\ \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial k} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{12}{7}$$

Substitution einsetzen und mit dem Betrag der Jacobi-Determinante multiplizieren:

$$f_{(M,K)}(m,k) = \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{200}\left(\frac{1}{7}k - \frac{6}{7}m\right)\right)\mathrm{e}^{-3m}\cdot\frac{12}{7}$$

Aufgabe 3

Sie betrachten eine Markoffkette mit dem folgenden Zustandsgraphen.



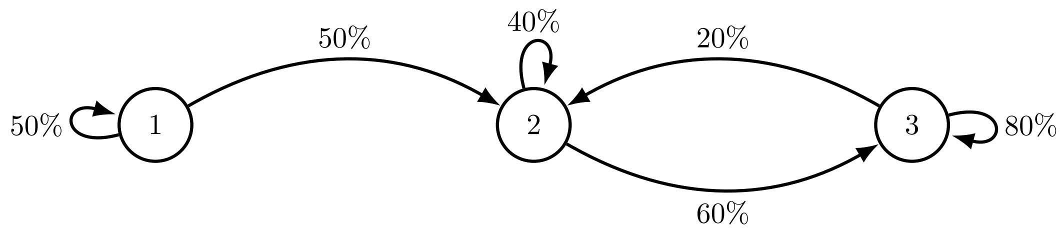
a) Begründen Sie, ob Zustand 1 von Zustand 3 aus erreichbar ist.

Geben Sie den Rand der Markoffkette an und begründen Sie, ob die Markoffkette absorbierend ist. *(3 Punkte)*

b) Stellen Sie die dazugehörige Übergangsmatrix auf. Benutzen Sie die im Diagramm angegebenen Zustandsnummern als Zeilen- beziehungsweise Spaltenindex beim Aufstellen der Matrix. *(2 Punkte)*

Die folgenden zwei Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden bearbeitet werden:

Im Folgenden betrachten Sie den folgenden Zustandsgraphen:

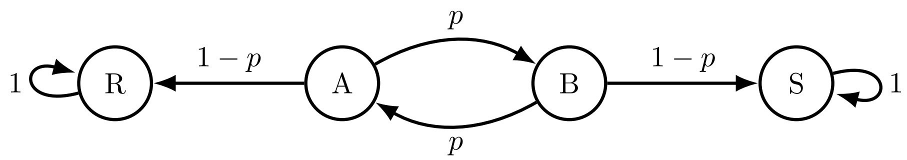


c) Die Anfangsverteilung laute $\mathbf{p} = (1/2, 1/2, 0)^{\mathrm{T}}$. Berechnen Sie die Verteilung nach zwei Zeitschritten und nach vier Zeitschritten. *(4 Punkte)*

d) Diese Markoffkette besitzt einen stationären Zustand. Berechnen Sie den stationären Zustand! *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorhergehenden bearbeitet werden.

Gegeben sei der folgende Zustandsgraph.



e) Berechnen Sie die mittlere Irrfahrtdauer bei gleichwahrscheinlichen Anfangszuständen $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Machen Sie sich die Symmetrie des Problems klar. *(2 Punkte)*

Lösung

a) Die Markoffkette hat keinen Rand, $R = \emptyset$. Zustand 1 ist von 3 nicht zu erreichen, da von 3 nur ein Pfad mit 0% Wahrscheinlichkeit (also: kein Pfad der wirklich vorkommt) existiert. Nur Markoffketten mit Rand sind absorbierend.

b) Übergangsmatrix:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

c)

$$\mathbf{P} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 25 & 45 & 30 \\ 0 & 28 & 72 \\ 0 & 24 & 76 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^4 = \frac{1}{10^4}\begin{pmatrix} 625 & 3105 & 6270 \\ 0 & 2512 & 7488 \\ 0 & 2496 & 7504 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}^T\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}365 & 0{,}51 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p}^T\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}031\,25 & 0{,}280\,85 & 0{,}6879 \end{pmatrix}$$

d) Stationärer Zustand: Eigenvektor $\mathbf{v}$ zu Eigenwert $\lambda = 1$, normiert, so dass es ein stochastischer Vektor ist. Das Eigenwertproblem ist dann

$$\mathbf{P}^T - 1 \cdot \mathbf{I} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \mathbf{0}.$$

Eigenvektor finden durch Bringen in obere Dreiecksform/Gaussen; Vorfaktor kann ignoriert werden.

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} =: \mathbf{v} \text{ ist Eigenvektor zum } \lambda = 1.$$

Der stationäre Zustand ist $\mathbf{p}_{\text{stat}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T$.

e) Aufgrund Symmetrie muss $m_A = m_B = \bar{m}$ sein. Der Rand umfasst $\{R, S\}$.

$$m_R = m_S = 0 \tag{1}$$
$$m_A = 1 + (1-p)m_R + pm_B \tag{2}$$
$$= 1 + 0 + pm_A \tag{3}$$
$$m_A(1-p) = 1 \tag{4}$$
$$m_A = \frac{1}{1-p} \tag{5}$$

Aufgabe 4

Ein angebliches Orakel behauptet, das Ergebnis eines fairen Münzwurfs mit Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ vorhersagen zu können. Um die Behauptung zu prüfen, wird zehn Mal ein Münzwurf durchgeführt, dessen Ergebnis das Orakel vorhersagen soll.

a) Geben Sie $(\Omega, \mathcal{B})$ des Experiments „Zehnfacher Münzwurf“ an. *(2 Punkte)*

b) Definieren Sie formal eine Zufallsvariable X, welche die Anzahl der korrekten Vorhersagen beschreibt. Welche Verteilung ergibt sich für X? *(3 Punkte)*

   Hinweis: Beschreiben Sie die Vorhersagen passend zum Experiment „Zehnfacher Münzwurf“.

Für die weiteren Teilaufgaben wird davon ausgegangen, dass das Orakel lediglich rät und die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Vorhersage pro Wurf in Wahrheit $p = \frac{1}{2}$ ist.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt das Orakel mindestens sieben Treffer? *(3 Punkte)*

d) Sie vermuten bereits, dass das Orakel nur rein zufällig rät, und wollen dies prüfen. Daher verlangen Sie, dass das Orakel eine Mindestanzahl richtiger Vorhersagen $0 \leq k \leq 10$ treffen soll. Welchen Wert müssen Sie für die Anzahl k der Treffer fordern, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Orakel durch Zufall mindestens k Treffer erzielt, höchstens 5% beträgt? *(4 Punkte)*

e) Zur Absicherung wollen Sie die Fähigkeiten des Orakels für $N = 1\,000$ Würfe überprüfen. Welchen Wert für die Trefferanzahl $k \in \{0, \ldots, 1\,000\}$ müssen Sie nun fordern, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Orakel in 1 000 Würfen durch Zufall mindestens k Treffer erzielt, höchstens 5% beträgt? *(3 Punkte)*

Lösung

a) Für den zehnfachen Münzwurf ist

$$\Omega = \{\omega = (m_1, \ldots, m_{10}) : m_i = 0\,(1) \Leftrightarrow i\text{-ter Münzwurf ergibt Kopf (Zahl)}\}.$$

   Als Sigma-Algebra kann die Potenzmenge gewählt werden, da Ω endlich ist.

b) Die Vorhersagen werden durch ein Tupel $(v_1, \ldots, v_{10}) \in \{0, 1\}^{10}$ beschrieben . Für die Anzahl der korrekten Vorhersagen folgt:

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \{0, \ldots, 10\} \\ \omega = (m_1, \ldots, m_{10}) & \mapsto \sum\limits_{i=1}^{10} \mathbb{1}\{m_i = v_i\} \end{cases}$$

   Da die Zufallsvariable “Treffer zählt“ besitzt sie eine Binomialverteilung $\text{Bin}(N, p)$ mit Parametern $N = 10$ und p.

c) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens sieben Treffer lautet im Fall einer zufälligen Vorhersage ($p = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot (120 + 45 + 10 + 1) = \frac{176}{1024} \approx 0{,}172 \end{aligned}$$

d) Wenn das Orakel nur rät, ist die Trefferwahrscheinlichkeit gerade $\frac{1}{2}$. Für diesen Fall soll die Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer höchstens 0,05 sein. (Laut Teilaufgabe c) sind mindestens sieben Treffer zu „großzügig“, da ≥ 7 Treffer bereits mit Wahrscheinlichkeit 0,172 auftreten.)

Gesucht ist somit das kleinste k, sodass

$$\sum_{i=k}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \leq 0{,}05 \Longleftrightarrow \sum_{i=k}^{10} \binom{10}{i} \leq 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2^{10} = 10^{-1} \cdot 2^{9} = 51{,}2$$

Man rechnet

k	$P(X \geq k)$
10	$\binom{10}{10} = 1$
9	$\binom{10}{9} + 1 = 11$
8	$\binom{10}{8} + 11 = 45 + 11 = 56 > 51{,}2$

Somit muss das Orakel mindestens $k = 9$ Treffer nachweisen, damit die Wahrscheinlichkeit für zufälliges Erreichen der Trefferzahl höchstes 0,05 beträgt.

e) Durch Anwendung des ZGWS folgt:

$$\begin{aligned}
& P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq k\right) \overset{!}{\leq} 0{,}05 \\
\Longleftrightarrow & P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 500}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} \geq \frac{k - 500}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}}\right) \overset{!}{\leq} 0{,}05 \\
\overset{\text{approx.}}{\Longleftrightarrow} & 1 - \Phi\left(\frac{k - 500 - \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}}\right) \overset{!}{\leq} 0{,}05 \quad (\text{mit Stetigkeitskorrektur}) \\
\Longleftrightarrow & \frac{k - 500 - \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} \overset{!}{\geq} 1{,}65 \\
\Longleftrightarrow & k \overset{!}{\geq} 1{,}65 \cdot \sqrt{250} + 500 + \frac{1}{2} = 526{,}1 \quad 526{,}6
\end{aligned}$$

Somit muss man 527 Treffer fordern.

Aufgabe 5

Am KIT findet ein Fußballturnier statt, welches aus einer Gruppenphase mit anschließender K.-o.-Runde besteht. In der Gruppenphase müssen drei Spiele bestritten werden. Der Sieger eines Spiels erhält 3 Punkte, der Verlierer erhält keine Punkte. Ein Unentschieden ist nicht möglich. Es werden 6 oder mehr Punkte in der Gruppenphase benötigt um die K.-o.-Runde zu erreichen.

Da alle Mannschaften etwa gleich stark sind, ist die Wahrscheinlichkeit für jede Mannschaft beim ersten Spiel zu gewinnen bei 50%. Jeder Sieg bzw. jede Niederlage stärkt bzw. schwächt das Selbstvertrauen der Mannschaft. Daher erhöht sich die Gewinn-Wahrscheinlichkeit einer Mannschaft nach einem Sieg um 10 Prozentpunkte und sinkt nach einer Niederlage um 5 Prozentpunkte. (Beispiel: $50\% \mapsto 60\%$ bzw. $50\% \mapsto 45\%$)

a) Modellieren Sie die Gruppenphase einer Mannschaft mittels Baumdarstellung. Beschriften Sie die Knoten mit den jeweiligen Gesamtpunktzahlen und die Kanten mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Mannschaft die K.-o.-Runde erreicht. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, nachdem die Mannschaft das erste Spiel verloren hat? *(3 Punkte)*

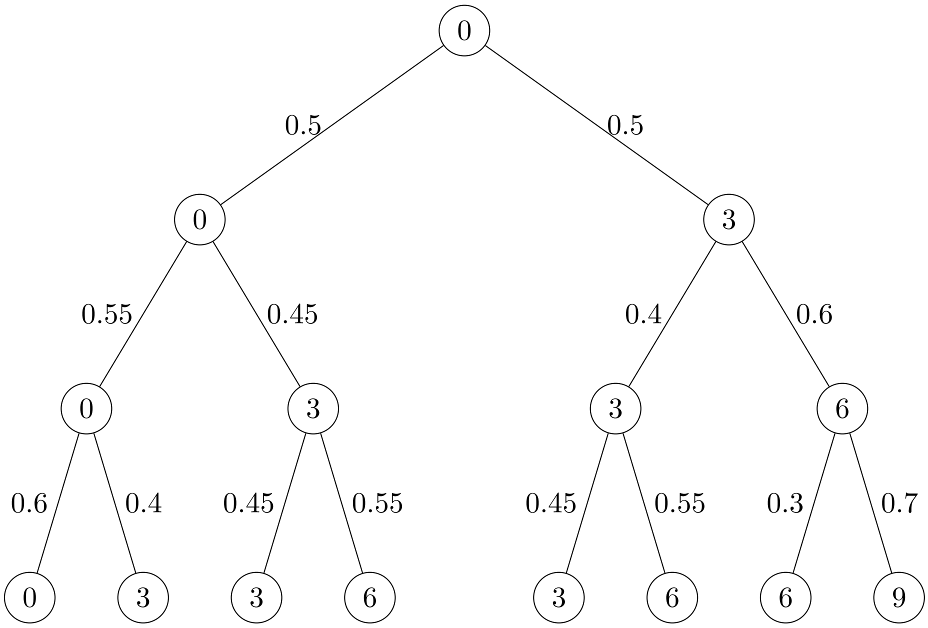
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Mannschaft das zweite Spiel gewinnt. *(2 Punkte)*

d) Sie erfahren, dass der *FSV Hamming* das zweite Spiel gewonnen hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er das erste Spiel verloren hat. *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die mittlere Punktzahl, die man von einer Mannschaft erwarten kann. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Die Baumdarstellung ist in der folgenden Grafik dargestellt. Eine Kante nach links symbolisiert die Niederlage, rechts den Sieg des betrachteten Teams.



b) Notation: Sei K die Anzahl an Punkten und A/B/C das Ergebnis des 1./2./3. Spiels mit S als Sieg und N als Niederlage.

Suche aus dem Baum von a) diejenigen Pfade heraus, die zu 6 oder mehr Punkten führen, und summiere das Produkt der Pfadwerte:

$$\begin{aligned}P(K \geq 6) &= 0{,}5 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}55 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7\\ &= 0{,}533\,75 \mathrel{\hat{=}} 53{,}375\%\end{aligned}$$

Nachdem das erste Spiel verloren wurde, also $A = N$ war, findet man im Baum aus a) nach einer Niederlage nur einen Pfad, der das ermöglicht:

$$P(K \geq 6 | A = N) = 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}2475 \mathrel{\hat{=}} 24{,}75\%$$

c) Gesucht: $P(B = S)$:

$$\begin{aligned}P(B = S) &= P(B = S|A = N) \cdot P(A = N) + P(B = S|A = S) \cdot P(A = S)\\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}45 \cdot 0{,}5 = 0{,}525 \mathrel{\hat{=}} 52{,}5\%\end{aligned}$$

d) Gesucht: $P(A = N|B = S)$. Lösung über Satz von Bayes mit $P(B = S|A = N)$ und $P(A = N)$ aus Baumdiagramm und $P(B = S)$ aus vorheriger Teilaufgabe:

$$\begin{aligned}P(A = N|B = S) &= \frac{P(B = S|A = N) \cdot P(A = N)}{P(B = S)}\\ &= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}5}{0{,}525} = 0{,}4286 \mathrel{\hat{=}} 42{,}86\%\end{aligned}$$

e) Der Erwartungswert lautet:

$$E\left(K\right) = \sum_k k \cdot P(K = k)$$

Die Wahrscheinlichkeiten für $P(K = k)$ lassen sich aus dem Baum errechnen:

$$\begin{aligned}P(K = 0) &= 0{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}165\\ P(K = 3) &= 0{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}45 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}45 = 0{,}301\,25\\ P(K = 6) &= 0{,}5 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}55 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}323\,75\\ P(K = 9) &= 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21\end{aligned}$$

Probe: $\sum_k P(K = k) = 1$ ist erfüllt. Damit ergibt sich der Erwartungswert zu:

$$E\left(K\right) = 0 \cdot 0{,}165 + 3 \cdot 0{,}301\,25 + 6 \cdot 0{,}323\,75 + 9 \cdot 0{,}21 = 4{,}736$$

Aufgabe 6

Für jeden Anruf, den eine der Mitarbeiterinnen und oder einer der Mitarbeiter eines Callcenters führen, bekommt sie oder er automatisiert $X \geq 0$ Leistungspunkte gutgeschrieben.
Der Erwartungswert der Leistungspunkte je Anruf beträgt 5, die Varianz beträgt 4. Die Anrufe sind statistisch unabhängig.

a) Wie groß sind die Varianz und der Erwartungswert der Punkte, die in 10 Anrufen erreicht werden? *(1 Punkt)*

b) Berechnen Sie eine hinreichende Anzahl N an Telefonaten, für die eine Person mit Wahrscheinlichkeit $\leq 0{,}05$ um 10% von der Durchschnittsleistung abweicht. *(4 Punkte)*

Anhand der Summe S der erreichten Punkte aus 1000 Telefonaten werden den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern Boni zugeteilt.

c) Berechnen Sie eine Schwelle γ, sodass 5% der Mitarbeiter einen Bonus erhalten. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden und voneinander bearbeitet werden.
Einige Mitarbeiter rufen sich selbst an, um betrügerisch Punkte zu erlangen. Eine Stichprobe über 1000 Telefonaten wird bezüglich ihrer Regelmäßigkeit untersucht.

d) Wenn die tatsächliche Betrugswahrscheinlichkeit bei $\frac{1}{20}$ liegt, wie wahrscheinlich ist dann eine Abweichung von mindestens 5 von den erwarteten 50 Beobachtungen? Berechnen Sie! *(3 Punkte)*

Die Kundenzufriedenheit $Z \in (0, 1]$ ist eine stetig verteilte Zufallsgröße. Bei Personen ohne Kaffee ist $P(Z \geq 0{,}5) = 0{,}1$. Der Einsatz von Kaffee führt zu einer Quadrierung der Kundenzufriedenheit, $Q = Z^2$.

e) Berechnen Sie eine untere Schranke für den Erwartungswert $E(Q)$ der Kundenzufriedenheit mit Kaffee.
Hinweis: Die Markoff'sche Ungleichung ist hier hilfreich. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Definiere $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Da die Punkte statistisch unabhängig sind, addieren sich Varianzen und Erwartungswerte aus den zehn Telefonaten: $E(S_{10}) = 10 \cdot E(X_1) = 50$, $V(S_{10}) = 10 \cdot V(X_1) = 40$.

b) Unter Verwendung der Tschebycheff'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
P\left(|S_N - E(S_N)| \geq \frac{1}{10}E(S_N)\right) &\leq \frac{1}{\left(\frac{1}{10}E(S_N)\right)^2}V(S_N) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}NE(X)\right)^2}NV(X) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{100}E^2(X)N}V(X) \qquad \overset{!}{\leq} \frac{1}{20} \qquad \| \cdot 20N
\end{aligned}$$

$$N \geq \frac{20 \cdot 100 \cdot V(X)}{E^2(X)} = \frac{8000}{25} = 320$$

Eine Anzahl von 320 Gesprächen ist hinreichend.

c) Bei $N = 1000$ Telefonaten liegt eine hinreichende Anzahl i.i.d. Realisierungen vor, sodass $S_N \sim \mathcal{N}(E(S_N); V(S_N))$ aufgrund des ZGWS angenommen werden kann.

Normierung der Variable:

$$\begin{aligned} \gamma &\leq S_N \\ \gamma - E(S_N) &\leq S_N - E(S_N) \\ \frac{\gamma - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}} &\leq \frac{S_N - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}} := T \sim \mathcal{N}(0;1) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$P(S_N \geq \gamma) \approx P\left(T \geq \frac{\gamma - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\gamma - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}}\right) \overset{!}{\geq} 5\%$$

$$\Phi\left(\frac{\gamma - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}}\right) \leq 0{,}95.$$

Unter Zuhilfenahme der Tabelle aus dem Anhang:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - E(S_N)}{\sqrt{V(S_N)}} &\leq 1{,}65 \\ \gamma &\leq 1{,}65 \cdot \sqrt{V(S_N)} + E(S_N) \\ &= 1{,}65 \cdot \sqrt{4000} + 5000 \approx 5104 \end{aligned}$$

d) Bei der Anzahl B_N der betrügerischen Telefonate aus $N = 1000$ Gesprächen handelt es sich um eine Zufallsvariable mit Bernoulli-Verteilung. Da die Anzahl der Stichproben aber im Vergleich zur Varianz groß ist ($Np(1-p) > 9$, $p = \frac{1}{20}$), kann der Satz von de Moivre-Laplace verwendet werden:

$$\begin{aligned} 1 - P(45 \leq B_n \leq 55) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{55 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) + \Phi\left(\frac{45 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(5\sqrt{\frac{2}{95}}\right) + \Phi\left(-5\sqrt{\frac{2}{95}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(5\sqrt{\frac{2}{95}}\right) + 1 - \Phi\left(5\sqrt{\frac{2}{95}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(5\sqrt{\frac{2}{95}}\right)\right) \\ &\approx 2\,(1 - \Phi\,(0{,}725)) \overset{\text{Tab.}}{\approx} 2\,(1 - 0{,}775) = 0{,}45 \end{aligned}$$

e) Die Anwendung der Markoff'sche Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned} P\left(|Z| \geq \frac{1}{2}\right) &\leq \frac{1}{\frac{1}{2^2}} E\left(|Z|^2\right) & Z > 0 \\ P\left(Z \geq \frac{1}{2}\right) &\leq 4 \cdot E\,(Q) \\ E(Q) &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}025 \end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.7}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{D.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{D.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{D.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{D.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{D.5}$$