Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie

29.09.2022

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **28.10.2022** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **3.11.2022** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **9.11.2022** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Bei einem Kartenspiel werden 32 Karten, bestehend aus 4 *Farben* $\{\text{Karo}, \text{Herz}, \text{Pik}, \text{Kreuz}\}$ und den *Werten* $\{7, 8, 9, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\}$ an 4 Personen ausgeteilt, sodass alle Personen jeweils 8 Karten erhalten. Jeweils 2 Personen bilden anschließend ein Team.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person 4 Asse erhält. *(2 Punkte)*

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ausschließlich verschiedene Werte erhält. Die Farben spielen hierbei keine Rolle. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Team mindestens 2 Asse erhält. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

In einem Zufallsexperiment wird das Tupel $(1, \ldots, n)$ durch eine zufällig ausgewählte *Permutation* umgeordnet, wobei alle Permutationen gleichwahrscheinlich sind. Die Zufallsvariable A_j beschreibt den Wert an der j-ten Stelle nach der Permutation. Anschließend bewerten die Indikatorfunktionen

$$G_j := \mathbb{1}\left\{A_j = \max_{1 \le i \le j} A_i\right\}$$

ob der Wert einer Permutation an der j-ten Stelle mit $1 \le j \le n$ das Maximum der Werte an den Stellen $1, \ldots, j$ ist.

d) Bestimmen Sie im Fall $n = 3$ mit welcher Wahrscheinlichkeit sich für $1 \le j \le 3$ jeweils die Werte $G_j = 1$ ergeben. *(3 Punkte)*

e) Bestimmen Sie allgemein für beliebige n und $1 \le j \le n$, mit welcher Wahrscheinlichkeit $G_j = 1$ ist. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Aus der hypergeometrischen Verteilung ergibt sich:

$$P(4 \text{ Asse}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} = \frac{20\,475}{10\,518\,300} \approx 0{,}0019$$

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, nur verschiedene Werte zu erhalten, folgt ebenfalls über die hypergeometrische Verteilung:

$$P(\text{alle Werte verschieden}) = \frac{\binom{4}{1}\cdots\binom{4}{1}}{\binom{32}{8}} = \frac{4^8}{\binom{32}{8}} = \frac{65\,536}{10\,518\,300} \approx 0{,}0062$$

c) Da das Team gemeinsam betrachtet wird, kann dies als Ziehen von 16 Karten betrachtet werden. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
P(\text{mind. 2 Asse im Team}) &= \sum_{n=2}^{4} \frac{\binom{4}{n}\binom{28}{16-n}}{\binom{32}{16}} \\
&= \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{16-2}}{\binom{32}{16}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{16-3}}{\binom{32}{16}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{16-4}}{\binom{32}{16}} \\
&= \frac{240\,699\,600}{601\,080\,390} + \frac{149\,768\,640}{601\,080\,390} + \frac{30\,421\,755}{601\,080\,390} \\
&= \frac{420\,889\,995}{601\,080\,390} \\
&\approx 0{,}700
\end{aligned}$$

d) Im Fall $n = 3$ ergibt sich durch Hinschreiben aller Tupel:

Permutation	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
(G_1, G_2, G_3)	$(1,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0,0)$

Abzählen liefert dann die Wahrscheinlichkeiten („Anzahl günstige Ereignisse/Anzahl mögliche Ereignisse“):

$$P(G_1 = 1) = \frac{6}{6} = 1$$
$$P(G_2 = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(G_3 = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

e) Aufgrund der vorherigen Teilaufgabe kann man $P(G_j = 1) = 1/j$ vermuten.

1. Herleitung (erklärend): Für eine feste Permutation ist genau dann $G_j = 1$, wenn die $j-$te Zahl die größte unter den ersten j Zahlen ist. Sobald die Zahlen aber feststehen, ist die Wahrscheinlichkeit hierfür $1/j$.

2. Herleitung (formal): Man rechnet („Anzahl günstige Ereignisse/Anzahl mögliche Ereignisse“)

$$P(G_j = 1) = \frac{\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{n!(j-1)!(n-j)!}{(n-j)!j!n!} = \frac{1}{j},$$

wobei

- $\binom{n}{j}$ entsteht, um die ersten j Stellen auszusuchen,
- $(j-1)!$ entsteht, um davon die ersten $j-1$ Stellen beliebig anzuordnen,
- $(n-j)!$ entsteht, um die restlichen $n-j$ Stellen beliebig anzuordnen, und
- $n!$ die Anzahl aller Permuationen beschreibt.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Bei Eishockey-Spielen gewinnt immer ein Team. Falls es daher nach der *regulären Spielzeit* (R) *unentschieden* (u) steht, kommt es zu einer *Verlängerung* (V). Falls es danach immer noch *unentschieden* steht, kommt es zu einem *Penalty-Schießen* (P), welches nur mit einem *Sieg* (s) oder einer *Niederlage* (n) enden kann.
Sie versuchen die Siegchancen eines Eishockey-Teams einzuschätzen, wobei Sie auf folgende Informationen der letzen 100 Spiele zurückgreifen können:

- Ergebnis nach *regulärer Spielzeit* (R): 50 mal *Sieg* (s), 20 mal *Niederlage* (n) und 30 mal *unentschieden* (u)
- nach *Verlängerung* (V): *Sieg* (s) in 40% der Verlängerungen, *Niederlage* (n) in 30% und *unentschieden* (u) in den restlichen Verlängerungen
- nach *Penalty-Schießen* (P): keine zuverlässigen Statistiken, daher Annahme einer Gleichverteilung

a) Modellieren Sie das mehrstufige Zufallsexperiment *formal.* Skizzieren Sie zudem den zugehörigen Baumgraphen und beschriften Sie alle Knoten und Kanten. *(3 Punkte)*

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg und für eine Niederlage. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(V = u|\text{Sieg})$. *(3 Punkte)*

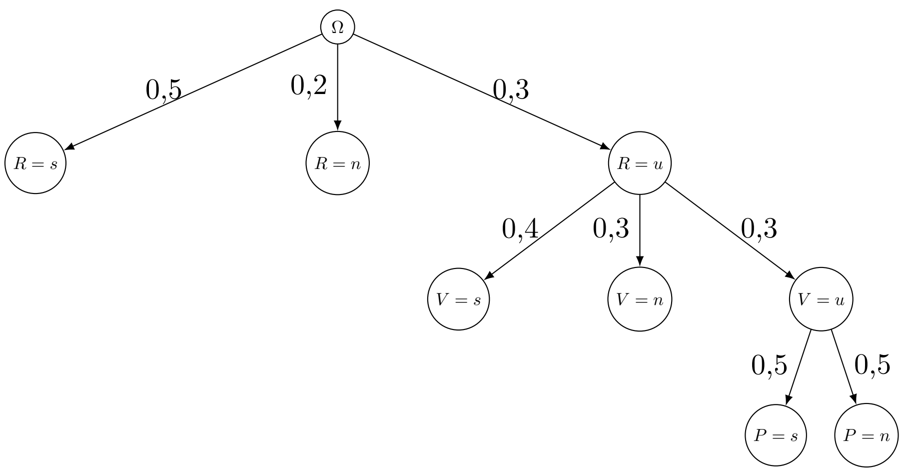
In internationalen Wettbewerben gilt die modifizierte 3-Punkte-Regel. Dabei erhält das Gewinnerteam 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte, wenn das Spiel nach der *regulären Spielzeit* endet. Geht das Spiel aber in die *Verlängerung* oder ins *Penalty-Schießen*, dann erhält das Gewinnerteam 2 Punkte und das Verliererteam noch 1 Punkt.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl an Punkten. *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 500 unabhängigen Spielen das Team im Schnitt mehr als 2 Punkte pro Spiel erhält. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Mit den Realisierungen der Zufallsvariablen $R = r$, $V = v$ und $P = p$: $\Omega = \{(r, v, p) : r \in \{s, n, u\}, v \in \{s, n, u\}, p \in \{s, n\}\}$



b) Die Addition aller Pfade, welche mit einem Sieg enden, ergibt:

$$\begin{aligned}P(\text{Sieg}) &= P(R=s) + P(R=u, V=s) + P(R=u, V=u, P=s)\\ &= P(R=s) + P(R=u)\cdot P(V=s|R=u)\\ &\quad + P(R=u)\cdot P(V=u|R=u)\cdot P(P=s|R=u, V=u)\\ &= 0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5 = \frac{133}{200} = 0{,}665\ .\end{aligned}$$

Das Gegenereignis ist eine Niederlage (da das gesamte Spiel nicht unentschieden enden kann):

$$P(\text{Niederlage}) = 1 - P(\text{Sieg}) = \frac{67}{200} = 0{,}335\ .$$

c) Mit dem Satz von Bayes ergibt sich

$$P(V=u|\text{Sieg}) = \frac{P(\text{Sieg}|V=u)\cdot P(V=u)}{P(\text{Sieg})} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{9}{100}}{\frac{133}{200}} = \frac{9}{133} \approx 0{,}0677\ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}P(\text{Sieg}|V=u) &= P(P=s|V=u) = 0{,}5\ ,\\ P(V=u) &= P(V=u|R=u)\cdot P(R=u) = 0{,}3\cdot 0{,}3 = \frac{9}{100} = 0{,}09.\end{aligned}$$

d) Die Anzahl der Punkte kann mit der Zufallsvariable $X \in \{0,1,2,3\}$ modelliert werden, welche jedem der sechs Blätter des Baumgraphen zugeordnet werden kann:

$$\begin{aligned}&R=s \to X=3 \qquad R=n \to X=0\\ &V=s \to X=2 \qquad V=n \to X=1\\ &P=s \to X=2 \qquad P=n \to X=1\ .\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}&P(X=0) = P(R=n) = 0{,}2\ ,\\ &P(X=1) = P(V=n) + P(P=n) = 0{,}3\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5 = \frac{27}{200} = 0{,}135\ ,\\ &P(X=2) = P(V=s) + P(P=s) = 0{,}3\cdot 0{,}4 + 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5 = \frac{33}{200} = 0{,}165\ ,\\ &P(X=3) = P(R=s) = 0{,}5\ .\end{aligned}$$

Somit kann der Erwartungswert für die Anzahl der Punkte berechnet werden zu

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\cdot P(X=x) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}135 + 2\cdot 0{,}165 + 3\cdot 0{,}5 = \frac{393}{200} = 1{,}965\ .$$

e) Das Problem kann mit dem zentralen Grenzwertsatz (ZGWS) gelöst werden. Demnach konvergiert die Verteilung der standardisierten Zufallsvariable $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ gegen eine Standardnormalverteilung für hinreichend große N. Zur Standardisierung muss noch die Varianz berechnet werden, welche sich mit

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2\cdot P(X=x) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}135 + 4\cdot 0{,}165 + 9\cdot 0{,}5 = \frac{1059}{200} = 5{,}295$$

berechnen lässt als

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5{,}295 - 1{,}965^2 \approx 1{,}434\ .$$

Somit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} P(S_N > N \cdot 2) &= 1 - P(S_N \leq N \cdot 2) = 1 - P\left(\frac{S_N - N \cdot E(X)}{\sqrt{N \cdot \mathrm{Var}(X)}} \leq \frac{N \cdot 2 - N \cdot E(X)}{\sqrt{N \cdot \mathrm{Var}(X)}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{500 \cdot 2 - 500 \cdot 1{,}965}{\sqrt{500 \cdot 1{,}434}}\right) \approx 1 - \Phi(0{,}654) \approx 1 - 0{,}743 = 0{,}257\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Eine Polizistin führt $N = 6$ Radarkontrollen auf einer Landstraße durch. Die Radarkontrollen können als unabhängig angenommen werden und führen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ zu einem Strafzettel. Die diskrete Zufallsvariable $R : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ beschreibt die Anzahl der Strafzettel in $N = 6$ Kontrollen.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω der diskreten Zufallsvariablen R an und bestimmen Sie deren Erwartungswert $E(R)$. *(2 Punkte)*

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei den Kontrollen genau 3 Strafzettel ergeben? *(2 Punkte)*

c) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_R(r)$ der Zufallsvariablen R. *(3 Punkte)*

d) Leiten Sie die Varianz von R für ein allgemeines $N \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ her. *(4 Punkte)*

Hinweis: Sie können die folgenden Korrespondenzen verwenden:

$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ und $nx \sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = n^2x^2 - nx^2 + nx$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Autofahrer muss jeden Tag auf seinem Arbeitsweg über die Landstraße und über die Autobahn fahren. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer auf der Landstraße bzw. auf der Autobahn zu schnell fährt und einen Strafzettel bekommt, liegt bei $p_\mathrm{L} = 0{,}2$ bzw. bei $p_\mathrm{A} = 0{,}3$.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Autofahrer an einem Tag 0, 1 oder 2 Strafzettel bekommt? *(2 Punkte)*

f) Der Autofahrer fährt an 200 unabhängigen Tagen im Jahr über seinen Arbeitsweg zur Arbeit. Wie viele Strafzettel sammelt der Autofahrer innerhalb eines Jahres? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Laut Aufgabenstellung beschreibt R die Anzahl der Strafzettel, welche von der Polizistin verteilt werden. Da bei $N = 6$ Radarkontrollen wenigstens 0 und höchstens 6 Strafzettel verteilt werden können, ist der Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$.

Da die einzelnen Kontrollen als unabhängig angenommen werden können, ergibt sich der Erwartungswert zu $E(R) = N \cdot p = 6 \cdot 0{,}2 = 1{,}2$.

b) Die beschriebene diskrete Verteilung entspricht einer Binominalverteilung. Die Wahrscheinlichkeit für genau 3 verteilte Strafzettel ist demnach

$$P(R = 3) = \binom{N}{3} p^3 (1-p)^{N-3} = \binom{6}{3} 0{,}2^3 (1 - 0{,}2)^{6-3} \approx 0{,}0819.$$

c) Um die Verteilungsfunktion von R skizzieren zu können, werden die Wahrscheinlichkeiten

$F_R(r) = P(R \leq r)$ für $r = 0, 1, \ldots, 6$ benötigt, welche rekursiv berechnet werden können:

$$F_R(0) = P(R = 0) = \binom{6}{0} 0{,}2^0 (1 - 0{,}2)^{6-0} \approx 0{,}2621$$

$$F_R(1) = F_R(0) + P(R = 1) = F_R(0) + \binom{6}{1} 0{,}2^1 (1 - 0{,}2)^{6-1} \approx 0{,}6554$$

$$F_R(2) = F_R(1) + P(R = 2) = F_R(1) + \binom{6}{2} 0{,}2^2 (1 - 0{,}2)^{6-2} \approx 0{,}9011$$

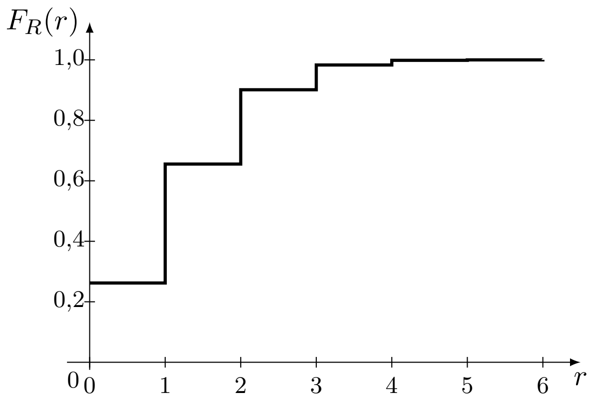
$$F_R(3) = F_R(2) + P(R = 3) = F_R(2) + \binom{6}{3} 0{,}2^3 (1 - 0{,}2)^{6-3} \approx 0{,}9830$$

$$F_R(4) = F_R(3) + P(R = 4) = F_R(3) + \binom{6}{4} 0{,}2^4 (1 - 0{,}2)^{6-4} \approx 0{,}9984$$

$$F_R(5) = F_R(4) + P(R = 5) = F_R(4) + \binom{6}{5} 0{,}2^5 (1 - 0{,}2)^{6-5} \approx 0{,}9999$$

$$F_R(6) = F_R(5) + P(R = 6) = F_R(5) + \binom{6}{6} 0{,}2^6 (1 - 0{,}2)^{6-6} = 1{,}0$$

Mit den berechneten Wahrscheinlichkeiten kann die Verteilungsfunktion skizziert werden:



d) Für die Berechnung der Varianz von R kann der Verschiebungssatz genutzt werden:

$$\begin{aligned}
V(R) &= E(R^2) - (E(R))^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 \cdot P(R = k) - (Np)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k} - (Np)^2.
\end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme der beiden Hinweise ergibt sich für den vorderen Teil

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k^2 \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\
=&\sum_{k=1}^{N} k^2 \frac{N}{k} \binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} \\
=&Np \sum_{k=1}^{N} k \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{N-k} \\
=&N^2 p^2 - Np^2 + Np.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist die Varianz also

$$\begin{aligned}
V(R) &= E(R^2) - (E(R))^2 \\
&= N^2p^2 - Np^2 + Np - (Np)^2 \\
&= -Np^2 + Np \\
&= Np(1-p).
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
P(0 \text{ Strafzettel}) &= (1-p_{\mathrm{L}}) \cdot (1-p_{\mathrm{A}}) = 0{,}56 \\
P(1 \text{ Strafzettel}) &= p_{\mathrm{L}} \cdot (1-p_{\mathrm{A}}) + (1-p_{\mathrm{L}}) \cdot p_{\mathrm{A}} = 0{,}38 \\
P(2 \text{ Strafzettel}) &= p_{\mathrm{L}} \cdot p_{\mathrm{A}} = 0{,}06
\end{aligned}$$

f) Da sich die Wahrscheinlichkeiten für einen Strafzettel auf der Autobahn von der Wahrscheinlichkeit für einen Strafzettel auf der Landstraße unterscheidet, kann das Gesamtproblem (die mittlere Anzahl der Strafzettel in einem Jahr) nicht als Binominalverteilung modelliert werden.

Jedoch kann die Anzahl der Strafzettel als Summe der Anzahl der Strafzettel von der Landstraße sowie der Autobahn berechnet werden. Beides kann separat als Binominalverteilung modelliert werden. Es ergibt sich für die Anzahl der mittleren Strafzettel die Summe aus den Erwartungswerten der beiden Binominalverteilungen, also $Np_{\mathrm{A}} + Np_{\mathrm{L}} = 100$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Für die Planung und Konstruktion von Windkraftanlagen ist eine statistische Modellierung der Windgeschwindigkeit essentiell. Die absolute Windgeschwindigkeit kann als Weibull-verteilte Zufallsvariable V mit den Parametern $\beta > 0$ und $\theta > 0$ modelliert werden. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist

$$F_V(v) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{v}{\theta}\right)^{\beta}\right), \quad v \geq 0.$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_V(v)$ der Weibullverteilung. *(3 Punkte)*

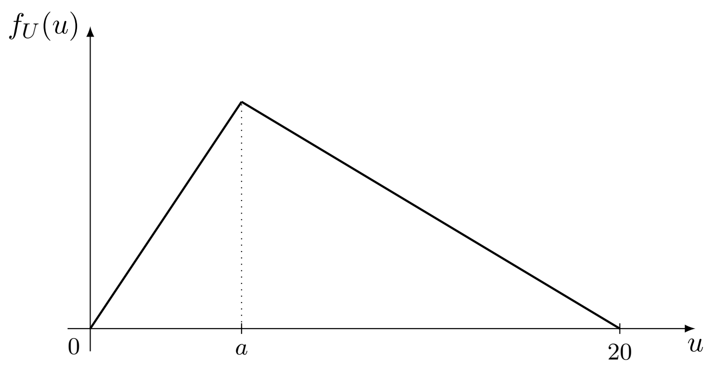
b) Eine Windkraftanlage speist Strom in das Stromnetz ein, wenn die absolute Windgeschwindigkeit größer als 4 m/s, jedoch kleiner als 25 m/s ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Windkraftanlage Strom einspeist, wenn die Windgeschwindigkeit Weibull-verteilt mit $\beta = 2{,}0$ und $\theta = 6{,}0$ ist. *(3 Punkte)*

c) Eine Zufallsvariable W genüge einer Weibullverteilung mit $\beta = 1$ und $\theta = 3$. Ermitteln Sie den Erwartungsvert $E(W)$. *(2 Punkte)*

d) Warum ist die Weibullverteilung für die Modellierung der absoluten Windgeschwindigkeit besser geeignet als eine Normalverteilung? *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

e) Eine alternative Modellierung legt der absoluten Windgeschwindigkeit die mit a parametrisierte Zufallsvariable U zugrunde. Der Parameter $a \in [0, 20]$ sei reellwertig. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von U ist im Folgenden skizziert:



Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_U(u)$ in Abhängigkeit von a formal dar. *(3 Punkte)*

f) Der Erwartungswert von U ist $E(U) = (a + 20)/3$. Für welche Parametrisierungen a ist $E(U)$ größer als der Modalwert von U? *(2 Punkte)*

Lösung

a) Da die gegebene Verteilungsfunktion $F_V(v)$ differenzierbar ist, kann die dazugehörige Dichtefunktion über die Ableitung nach v bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f_V(v) = \frac{\mathrm{d}F_V(v)}{\mathrm{d}v} &= -\exp\left(-\left(\frac{v}{\theta}\right)^\beta\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(-\left(\frac{v}{\theta}\right)^\beta\right) \\ &= -\exp\left(-\left(\frac{v}{\theta}\right)^\beta\right)\left(\frac{-1}{\theta^\beta}\beta v^{\beta-1}\right) \\ &= \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{v}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\left(\frac{v}{\theta}\right)^\beta\right), \quad v > 0. \end{aligned}$$

b) Man rechnet direkt:

$$\begin{aligned} &P(\text{Windkraftanlage speist Strom ins Netz ein}) \\ =&P(4 \text{ m/s} < v < 25 \text{ m/s}) \\ =&F_V(25) - F_V(4) \\ =&1 - \exp\left(-\left(\frac{25}{6}\right)^2\right) - \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{4}{6}\right)^2\right)\right) \\ =&\exp\left(-\left(\frac{4}{6}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{25}{6}\right)^2\right) \\ \approx&0{,}641 \end{aligned}$$

Die Windkraftanlage speist also zu 64,1% Strom ins Netz ein.

c) Für $\beta = 1$ ist die Weibullverteilung eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 1/\theta = 1/3$. Eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ hat den Erwartungswert $1/\lambda$. Daher ergibt sich für die Zufallsvariable W der Erwartungswert $E(W) = \frac{1}{1/3} = 3$.

d) Die absolute Windgeschwindigkeit ist eine reellwertige und positive Größe. Die Weibullverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen. Im Gegensatz dazu ist die Normalverteilung auf der Menge aller reellen Zahlen definiert, also insbesondere auch auf negativen Zahlen, was im Kontext von absoluten Geschwindigkeiten wenig Sinn ergibt.

e) Um $f_U(u)$ zu bestimmen, geben wir die Diche zuerst in Abhängigkeit einer Variablen b mit $b := f_U(a)$ an:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot u & u \in [0, a] \\ \frac{20b}{20-a} - \frac{b}{20-a} \cdot u & u \in (a, 20] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um b zu bestimmen, können wir die Eigenschaft der Normiertheit von Wahrscheinlichkeitsdichten nutzen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)\mathrm{d}u = 1 \\ \Leftrightarrow 0{,}5 \cdot b \cdot 20 = 1 \\ \Leftrightarrow b = 0{,}1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt die gesuchte Dichte

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{10a} & u \in [0, a] \\ \frac{2}{20-a} - \frac{0.1}{20-a} \cdot u & u \in (a, 20] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Die Zufallsvariable U hat für $a \in [0, 20]$ jeweils genau ein lokales Maximum an der Stelle a. Der Modalwert liegt also bei a. Die Bedingung, dass der Modalwert größer als der Erwartungswert ist, entpricht also

$$a > E(U) = \frac{a + 20}{3} \Leftrightarrow a > 10.$$

Für $a > 10$ ist also der Modalwert von U größer als der Erwartungswert von U.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben ist die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{3}{32}\,(2x-y)^2$$

mit $0 \le x \le 2$ und $0 \le y \le 2$.

a) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$. *(2 Punkte)*

c) Sind die beiden Zufallsvariablen X und Y unkorreliert? Berechnen Sie dazu die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X,Y)$. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{(Z,W)}(z,w)$, wobei $Z = \sqrt{X+Y}$. Wählen Sie eine geeignete Abbildung $W = g(X,Y)$ für diese Transformation. Geben Sie den Definitionsbereich der Dichte an. *(4 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Randdichte $f_Z(z)$. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Randdichten können aus der Verbunddichte durch Integration über die jeweils anderen Zufallsvariablen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}y + \int_0^2 \frac{3}{32}\left(4x^2-4xy+y^2\right)\mathrm{d}y + \int_2^{\infty} 0\cdot\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{32}\left[4x^2y - 2xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^2 = \frac{3}{32}\left(8x^2 - 8x + \frac{8}{3}\right) \\
&= \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot\mathrm{d}x + \int_0^2 \frac{3}{32}\left(4x^2-4xy+y^2\right)\mathrm{d}x + \int_2^{\infty} 0\cdot\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{32}\left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2y + xy^2\right]_0^2 = \frac{3}{32}\left(\frac{32}{3} - 8y + 2y^2\right) \\
&= \frac{3}{16}y^2 - \frac{3}{4}y + 1\,.
\end{aligned}$$

b) Die Erwartungswerte können aus den Randdichten berechnet werden, da

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2\right]_0^2 = \left(3 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{3}{16}y^3 - \frac{3}{4}y^2 + y\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{3}{64}y^4 - \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = \left(\frac{3}{4} - 2 + 2\right) = \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$

c) Die Kovarianz ist definiert als

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \ .$$

Mit

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^2 \frac{3}{32}\left(4x^3y - 4x^2y^2 + xy^3\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{32}\int_0^2 \left[x^4y - \frac{4}{3}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^2y^3\right]_0^2 \mathrm{d}y = \frac{3}{32}\int_0^2 \left(16y - \frac{32}{3}y^2 + 2y^3\right)_0^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{32}\left[8y^2 - \frac{32}{9}y^3 + \frac{1}{2}y^4\right]_0^2 = \frac{3}{32}\left(32 - \frac{8}{3}\cdot\frac{32}{3} + 8\right) = 3 - \frac{8}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12}
\end{aligned}$$

ergibt sich eine Kovarianz

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{13}{12} - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{26}{24} - \frac{27}{24} = -\frac{1}{24} < 0 \ ,$$

sodass die beiden Zufallsvariablen X und Y <u>nicht</u> unkorreliert sind.

d) Durch Wahl der Abbildungen $Z = \sqrt{X+Y}$ und $W = Y$ können die Zufallsvariablen transformiert werden. Mit den Umkehrabbildungen $Y = W$ und $X = Z^2 - Y = Z^2 - W$ ergibt sich die Verbunddichte

$$\begin{aligned}
f_{(Z,W)}(z,w) &= |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{(X,Y)}(z^2-w,w) \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} 2z & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right| \cdot f_{(X,Y)}(z^2-w,w) \\
&= 2z \cdot \frac{3}{32}\left(2(z^2-w) - w\right)^2 \\
&= \frac{3}{16}z\left(2z^2 - 3w\right)^2 = \frac{3}{16}\left(4z^5 - 12z^3w + 9zw^2\right) \ .
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich für z und w ergibt sich aus dem von x und y. Konkret gilt $0 \leq z^2 - w \leq 2$ und $0 \leq w \leq 2$ aufgrund der Grenzen für x und y.

e) Aus dem Definitionsbereich ergeben sich die Integrationsgrenzen für w zu $\max\{0, z^2 - 2\} \leq w \leq \max\{z^2, 2\}$, sodass es eine Fallunterscheidung für $f(z)$ gibt. Außerdem ist der kleinste überhaupt erreichbare Wert $z = \sqrt{0+0} = 0$ und der Größte ist $z = \sqrt{2+2} = 2$. Konkret ist also $\max\{0, z^2-2\} = 0 \leq w \leq z^2 = \max\{z^2, 2\}$ für $0 \leq z \leq \sqrt{2}$ und $\max\{0, z^2-2\} = z^2 - 2 \leq w \leq 2 = \max\{z^2, 2\}$ für $\sqrt{2} < z \leq 2$.

Daraus ergibt sich die Randdichte für $0 \leq z \leq \sqrt{2}$ zu

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(Z,W)}(z,w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{z^2}\frac{3}{16}\left(4z^5 - 12z^3w + 9zw^2\right)\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{3}{16}\left[4z^5w - 6z^3w^2 + 3zw^3\right]_0^{z^2} = \frac{3}{16}\left(4z^76z^7 + 3z^7\right) = \frac{3}{16}z^7 \ .
\end{aligned}$$

Für $\sqrt{2} < z \leq 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{3}{16}\left[4z^5w - 6z^3w^2 + 3zw^3\right]_{z^2-2}^2 \\
&= \frac{3}{16}\left(8z^5 - 24z^3 + 24z - 4z^5(z^2-2) + 6z^3(z^2-2)^2 - 3z(z^2-2)^3\right) \\
&= \frac{3}{16}\left(8z^5 - 24z^3 + 24z - 4z^7 + 8z^5 + 6z^7 - 24z^5 + 24z^3 - 3z^7 + 18z^5 - 36z^3 + 24z\right) \\
&= \frac{3}{16}\left(-z^7 + 10z^5 - 36z^3 + 48z\right) \ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Gegeben sind unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen $X[n] \sim \mathcal{U}(\{-1,1\})$ für $n = 1, 2, \ldots$ Aus diesen wird durch Multiplikation ein stochastischer Prozess $Y[n]$ konstruiert gemäß

$$Y[n] = \prod_{i=1}^{n} X[i], \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Berechnen Sie die Verteilung von $Y[n]$. *(3 Punkte)*

Hinweis: Beginnen Sie mit der Untersuchung der Verteilung von $Y[1]$, leiten daraus die Verteilung von $Y[2]$ her und verallgemeinern Sie anschließend.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $Y[n]$. *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum von $Y[n]$. *(4 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

d) Argumentieren Sie, warum der Prozess $Y[n]$ eine Markoffkette ist. Geben Sie die Übergangsmatrix der Markoffkette an. *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Verteilung von $Y[100]$ für den Fall $X[1] = 1$ *unter Verwendung der Übergangsmatrix* aus Teilaufgabe d). *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die möglichen Werte von $Y[1] = X[1]$ sind ± 1. Da $X[n]$ jeweils gleichverteilt ist, folgt $P(Y[1] = +1) = P(Y[1] = -1) = \frac{1}{2}$.

Für den folgenden Zeitpunkt $n = 2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P(Y[2] = +1) &= P(Y[2] = +1 \big| Y[1] = +1) \cdot P(Y[1] = +1) \\
&\quad + P(Y[2] = +1 \big| Y[1] = -1) \cdot P(Y[1] = -1) \\
&= P(X[2] = +1) \cdot P(Y[1] = +1) + P(X[2] = -1) \cdot P(Y[1] = -1) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Identische Betrachungen gelten in jedem weiteren Zeitschritt, sodass stets $P(Y[n] = +1) = P(Y[n] = -1) = \frac{1}{2}$ und somit $Y[n] \sim \mathcal{U}(\{-1,1\})$ gilt.

b) Der Erwartungswert eines Produktes unabhängiger Zufallsvariablen ist das Produkt der Erwartungswerte. Somit gilt:

$$E(Y[n]) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X[i]\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X[i]) = 0.$$

Das gleiche Ergebnis ergäbe sich auch durch Rechnung mit der Verteilung aus a).

c) Zuerst berechnet man die Autokorrelationsfunktion mit dem Ansatz:

$$\varphi_{YY}[n,k] \;=\; E\left(Y[n+k]Y[n]\right) \;= E\left(\prod_{i=1}^{n+k} X[i] \prod_{j=1}^{n} X[j]\right).$$

Ist $k \neq 0$, so sind die Obergrenzen der Produkte unterschiedlich. Damit enthält eines der Produkte Faktoren, die im anderen Produkt nicht auftreten. Diese sind nach Konstruktion der $X[\cdot]$ von allen anderen Werten unabhängig. Da jedes $X[n]$ den Erwartungswert null hat, folgt insgesamt

$$\varphi_{YY}[n,k] = 0, k \neq 0.$$

Für $k = 0$ rechnet man:

$$\begin{aligned}\varphi_{YY}[n,k] &= E\left(Y[n+k]Y[n]\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X[i] \prod_{j=1}^{n} X[j]\right) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{n} X[i]^2\right) = 1\end{aligned}$$

Insgesamt folgt, dass die AKF nur von der Differenz der Zeitpunkte abhängig ist und bzgl. der Verschiebung k einen Dirac bildet:

$$\varphi_{YY}[n,k] = \varphi_{YY}[k] = \delta[k].$$

Das Leistungsdichtespektrum lautet damit:

$$\Phi_{YY}(f) = \mathcal{F}\left\{\varphi_{YY}[k]\right\} = 1, \quad f \in \mathbb{R}.$$

d) Bei Betrachtung der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P\left(Y[n+1] = y_{n+1} \middle| Y[n] = y_n, \ldots Y[1] = y_1\right)$$

fällt auf, dass der Werte von $Y[n+1]$ vollständig durch $Y[n]$ und $X[n+1]$ bestimmt wird und die Werte $Y[1], \ldots, Y[n-1]$ keine Rolle spielen, sobald $Y[n] = y_n$ festgelegt ist. Damit ist

$$P\left(Y[n+1] = y_{n+1} \middle| Y[n] = y_n, \ldots Y[1] = y_1\right) = P\left(Y[n+1] = y_{n+1} \middle| Y[n] = y_n\right)$$

d.h. der Prozess ist eine Markoffkette.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten entstehen wie in Teilaufgabe a)

$$\begin{aligned}P(Y[n+1] = j \big| Y[n] = i) &= \begin{cases} P(X[n] = 1), & i = j, \\ P(X[n] = -1), & i \neq j, \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix ist damit

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Für die Übergangsmatrix rechnet man

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \implies \mathbf{P}^m = \mathbf{P}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Daraus ergibt sich für den Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus a).

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.7}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2 x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{D.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{D.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{D.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{D.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{D.5}$$