Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Peter Rost
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie

28.09.2023

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **27.10.2023** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **03.11.2023** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **10.11.2023** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{P}\}$. Wie lautet die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$? *(3 Punkte)*

b) Für einen normalen Burger werden 3 der 4 möglichen Zutaten ausgewählt und in einer bestimmten Reihenfolge auf das Burgerbrötchen gelegt. Wie viele verschiedene normale Burger gibt es? *(4 Punkte)*

c) Ein Burger „Spezial“ besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial“ gibt es? *(4 Punkte)*

d) Der Burger „Jumbo“ enthält die folgende Menge an Zutaten: $\{\mathrm{S}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P}\}$ die alle verwendet werden. Wie viele mögliche Belegungen des Burgers „Jumbo“ gibt es? *(4 Punkte)*

Lösung

a) Die Potenzmenge lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\Omega) = \{&\emptyset, \{\mathrm{S}\}, \{\mathrm{K}\}, \{\mathrm{T}\}, \{\mathrm{P}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{K}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{T}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{K}, \mathrm{T}\}, \{\mathrm{K}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{T}, \mathrm{P}\},\\ &\{\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{P}\}, \{\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{P}\}\}\end{aligned}$$

b) Modell Variation $V_N^{(K)}$: Aus Ω werden $K = 3 < N = 4$ Elemente mit Beachtung der Reihenfolge gezogen. Die Elemente von Ω sind alle unterscheidbar und werden nicht zurückgelegt. Es folgt die Anzahl der Variationen:

$$\left|V_N^{(K)}\right| = \frac{N!}{(N-K)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24.$$

c) Basierend auf der Beschreibung ist jeder normale Burger auch ein Burger „Spezial“. Die Anzahl der Möglichkeiten für einen normalen Burger wurde in a) zu 24 bestimmt. Zusätzlich gibt es noch 3 Kombinationen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) die jeweils 2 Salat enthalten ({S,S,K}, {S,S,T}, {S,S,P}). Jede dieser Kombinationen hat 3 Permutationen (mit Berücksichtigung der Reihenfolge, z.B. (S,S,T), (S,T,S) und (T,S,S)). Es ergeben sich also $3 \cdot 3 = 9$ Variationen für einen Burger „Spezial“ mit 2 mal Salat. Die gleiche Argumentation gilt auch für Burger „Spezial“ mit 2 mal Tomate. Insgesamt ergeben sich demnach $24 + 9 + 9 = 42$ verschiedene Burger „Spezial“.

d) Modell Permutationen $\Pi_N^{(L_S, L_T, L_K, L_P)}$: Aus $\Omega_{\mathrm{Jumbo}} = \{\mathrm{S}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P}\}$ werden alle möglichen Anordnungen betrachtet (entspricht Ziehen von $N = 10$ Elementen mit Beachtung der Reihenfolge). Jeweils $L_{\mathrm{S}} = 2, L_{\mathrm{T}} = 2, L_{\mathrm{K}} = 3, L_{\mathrm{P}} = 3$ der N Elemente sind gleich. Es folgt die Anzahl der Permutationen:

$$\left|\Pi_N^{(L_S, L_T, L_K, L_P)}\right| = \frac{N!}{L_S! \cdot L_T! \cdot L_K! \cdot L_P!} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!} = 25200.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Zum Zeitpunkt $k = 0$ sind $N_0 = 10\,000$ Eier eines Schmetterlings vorhanden. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\mathrm{er}} = {}^{1}\!/_{3}$ pro Ei und Tag schlüpft eine Raupe aus dem Ei. Aus jeder Raupe wird pro Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{\mathrm{rs}} = {}^{1}\!/_{3}$ ein Schmetterling. Außerdem können sowohl ein Ei, eine Raupe oder ein Schmetterling sterben, also in den Zustand *tot* übergehen. Die Wahrscheinlichkeiten dafür sind jeden Tag $p_{\mathrm{et}} = {}^{1}\!/_{6}$ pro Ei, $p_{\mathrm{rt}} = {}^{1}\!/_{3}$ pro Raupe und $p_{\mathrm{st}} = {}^{1}\!/_{6}$ pro Schmetterling. Die Wahrscheinlichkeiten dafür, vom Zustand *tot* in einen der anderen Zustände zu kommen sind jeweils null.

a) Modellieren Sie den Ablauf als Markoffkette. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an. *(5 Punkte)*

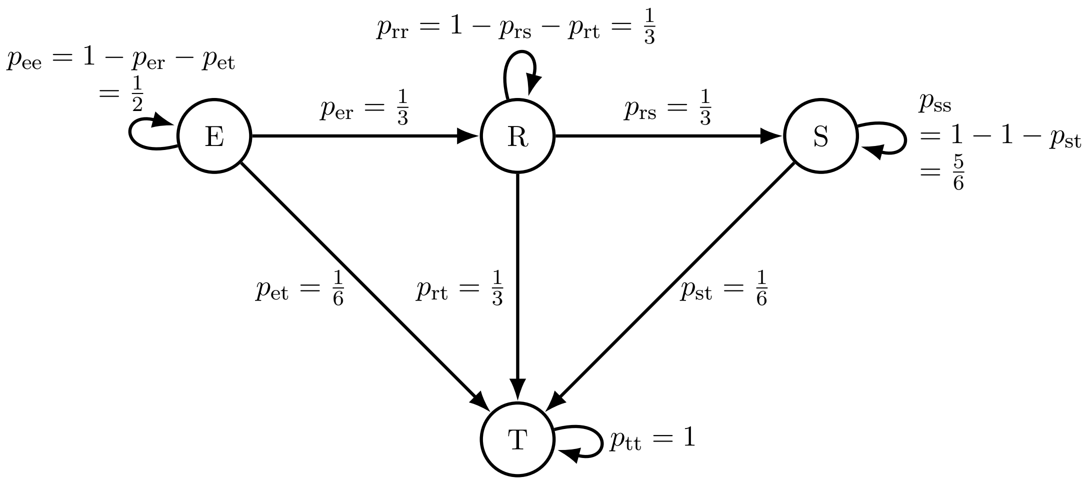
b) Erklären Sie, was eine homogene Markoffkette ist. Hat obiges Szenario einen absorbierenden Zustand? *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie jeweils die erwartete Anzahl an Raupen und Schmetterlingen nach $k = 2$ und $k = 4$ Tagen. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Tagen $\bar{k}_{\mathrm{ET}}$, die vergehen, bis man vom Zustand *Ei* im Zustand *tot* ist. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Übergangsgraph:



Übergangsmatrix (Indizierung: E, R, S, T):

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{3} & 0 & {}^{1}\!/_{6} \\ 0 & {}^{1}\!/_{3} & {}^{1}\!/_{3} & {}^{1}\!/_{3} \\ 0 & 0 & {}^{5}\!/_{6} & {}^{1}\!/_{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Eine Markoffkette ist ein diskreter stochastischer Prozess, wobei die Übergänge zwischen den Zuständen nur vom momentanen Zustand abhängen. Bei einer homogenen Markoffkette sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zeitinvariant.
Diese Kette hat den absorbierenden Zustand *tot*, da dessen Übergangswahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{tt}} = 1$ ist.

c) Die mittlere Anzahl $\boldsymbol{n}[k]$ zum Zeitpunkt k kann berechnet werden durch $\boldsymbol{n}[k] = N_0 \cdot \boldsymbol{p}[k]$, wobei $\boldsymbol{p}^\mathsf{T}[k] = \boldsymbol{p}^\mathsf{T}[0] \cdot \boldsymbol{P}^k$ und $\boldsymbol{p}^\mathsf{T}[0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mit

$$\boldsymbol{P}^2 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 & 13 \\ 0 & 4 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 25 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}2778 & 0{,}1111 & 0{,}3611 \\ 0 & 0{,}1111 & 0{,}3889 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}6944 & 0{,}3056 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^4 = \boldsymbol{P}^2 \cdot \boldsymbol{P}^2 = \frac{1}{1296} \begin{pmatrix} 81 & 130 & 276 & 809 \\ 0 & 16 & 406 & 874 \\ 0 & 0 & 625 & 671 \\ 0 & 0 & 0 & 1296 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0{,}1003 & 0{,}2130 & 0{,}6242 \\ 0 & 0{,}0123 & 0{,}3133 & 0{,}6744 \\ 0 & 0 & 0{,}4823 & 0{,}5177 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $\boldsymbol{n}^\mathsf{T}[2] = \begin{pmatrix} 2500 & 2778 & 1111 & 3611 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{n}^\mathsf{T}[4] = \begin{pmatrix} 625 & 1003 & 2130 & 6242 \end{pmatrix}$, sodass nach 2 Tagen im Mittel 2778 Raupen und 1111 Schmetterlinge und nach 4 Tagen im Mittel 1003 Raupen und 2130 Schmetterlinge existieren.

Alternativer Rechenweg:

- Nach zwei Tagen:

$$n_\mathrm{R}[2] = N_0 \cdot (p_\mathrm{ee} \cdot p_\mathrm{er} + p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr}) = 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) \approx 2778$$

$$n_\mathrm{S}[2] = N_0 \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rs} = 10\,000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \approx 1111$$

- Nach vier Tagen:

$$\begin{aligned} n_\mathrm{Raupen}[4] &= N_0 \cdot (p_\mathrm{ee}^3 \cdot p_\mathrm{er} + p_\mathrm{ee}^2 \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr} + p_\mathrm{ee} \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr}^2 + p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr}^3) \\ &= 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54} + \frac{1}{81} \right) \approx 1003 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_\mathrm{Schmetterlinge}[4] &= N_0 \cdot (p_\mathrm{ee}^2 \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rs} + p_\mathrm{ee} \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr} \cdot p_\mathrm{rs} + p_\mathrm{ee} \cdot p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rs} \cdot p_\mathrm{ss} \\ &\quad + p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr}^2 \cdot p_\mathrm{rs} + p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rr} \cdot p_\mathrm{rs} \cdot p_\mathrm{ss} + p_\mathrm{er} \cdot p_\mathrm{rs} \cdot p_\mathrm{ss}^2) \\ &= 10\,000 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{54} + \frac{5}{108} + \frac{1}{81} + \frac{5}{162} + \frac{25}{324} \right) \approx 2130 \end{aligned}$$

d) Die mittlere Anzahl an Tagen $\bar{k}_\mathrm{ET}$ von Zustand E zu Zustand T kann berechnet werden durch lösen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{T} &= 0 \\ m_\mathrm{S} &= 1 + \frac{5}{6} m_\mathrm{S} + \frac{1}{6} m_\mathrm{T} \\ m_\mathrm{R} &= 1 + \frac{1}{3} m_\mathrm{R} + \frac{1}{3} m_\mathrm{S} + \frac{1}{3} m_\mathrm{T} \\ m_\mathrm{E} &= 1 + \frac{1}{2} m_\mathrm{E} + \frac{1}{3} m_\mathrm{R} + \frac{1}{6} m_\mathrm{T} \end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt eine mittlere Dauer von $\bar{k}_\mathrm{ET} = m_\mathrm{E} = 5$ Tagen.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Ein Straßenmusiker beobachtet, dass bei seinen Konzerten durchschnittlich 8 Menschen eine Spende in seinen Hut werfen. Zur Modellierung wird dazu die Zufallsvariable $X \hat{=}$ „Anzahl der Menschen, die während eines Konzerts eine Spende in den Hut werfen" als Poisson-verteilt angenommen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während eines zufällig ausgewählten Konzerts mindestens 6 Spenden in den Hut geworfen werden. *(3 Punkte)*

Betrachtet werden nun 150 zufällig ausgewählte und unabhängige Konzerte.

b) Wie und mit welchen Parametern ist die Zufallsvariable $Y \hat{=}$ „Anzahl der Konzerte, bei denen mindestens 6 Spenden in den Hut geworfen werden" verteilt? Geben Sie außerdem Erwartungswert und Varianz von Y an. *(4 Punkte)*

c) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Konzerte, bei denen mindestens 6 Spenden in den Hut geworfen werden, mindestens 130 beträgt. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spendenbetrag größer als 5€ ist, sei für jede Spende unabhängig bei $p = 0{,}2$. Um diese Zahl zu schätzen, berechnet der Musiker die relative Häufigkeit $R_n = \frac{X_n}{n}$, wobei X_n die Anzahl an Spenden über 5€ bei insgesamt n Spenden ist. Schätzen Sie mithilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ab, wie groß n mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit eines Schätzfehlers $|R_n - p| \geq 0{,}1$, kleiner als 1 % ist? *(4 Punkte)*

Lösung

a) X folgt einer Poissonverteilung $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = 8$, da $E(X) = 8$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= 1 - P(X \leq 5) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{5} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &\approx 1 - \mathrm{e}^{-8} (1 + 8 + 32 + 85{,}33 + 170{,}67 + 273{,}067) \\ &\approx 1 - 0{,}191 = 0{,}809. \end{aligned}$$

b) Y folgt einer Binominalverteilung $Y \sim \text{Bin}(n = 150, p = 0{,}809)$. Der Erwartungswert ist demnach $E(Y) = np = 121{,}35$ und die Varianz ist $V(Y) = np(1-p) = 23{,}18$.

c) Die binominalverteilte Zufallsvariable Y kann mittels des zentralen Grenzwertsatzes für große n näherungsweise durch eine Normalverteilung beschrieben werden:

$$Y_{\text{ZGWS}} \sim \mathcal{N}(E(Y), V(Y)) = \mathcal{N}(\mu = 121{,}35, \sigma^2 = 23{,}18).$$

Da $V(Y) = 23{,}18 \geq 9$ ist die Approximation auch praktisch zulässig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} P(Y_{\text{ZGWS}} \geq 130) &= 1 - P(Y_{\text{ZGWS}} \leq 130) \\ &= 1 - P\left(\frac{Y_{\text{ZGWS}} - E(Y)}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{130 - E(Y)}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{130 - E(Y)}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{130 - 121{,}35}{\sqrt{23{,}18}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1{,}80) \approx 1 - 0{,}964 = 0{,}036. \end{aligned}$$

d) Die Anzahl an Spendenbeiträgen (von insgesamt n Spenden) die größer als 5€ sind, kann als binominalverteilte Zufallsvariable G_n mit $p = 0{,}2$ interpretiert werden. Demnach folgt $E(R_n) = \frac{1}{n}E(G_n) = p$ und $\operatorname{Var}(R_n) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(G_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. Die Aufgabe fragt nach dem kleinsten n, sodass die Wahrscheinlichkeit $P(|R_n - p| \geq 0{,}1) \leq 0{,}01$. Mithilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(|R_n - p| \geq 0{,}1) &\leq \frac{\sigma^2}{(0{,}1)^2} = \frac{p(1-p)}{n(0{,}1)^2} \overset{!}{\leq} 0{,}01 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{p(1-p)}{0{,}01 \cdot (0{,}1)^2} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}01 \cdot 0{,}01} = 1600. \end{aligned}$$

Die relative Häufigkeit muss also über mindestens $n = 1600$ Spenden berechnet werden um die geforderten Bedingungen zu erfüllen.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

In einem Experiment werden drei Münzen verwendet: eine faire Münze (f), eine gezinkte Münze (g), die zu 60% Kopf zeigt und eine unbekannte Münze (u). Es wird zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der drei Münzen gewählt und geworfen. In 70% der Fälle zeigt die geworfene Münze Kopf (k) und sonst Zahl (z).

a) Stellen Sie das Experiment grafisch in Form eines Baumdiagramms dar. Berechnen Sie fehlende Wahrscheinlichkeiten und beschriften Sie alle Kanten und Knoten. Was können Sie über die unbekannte Münze sagen? *(5 Punkte)*

b) Sie wählen zufällig eine der drei Münzen und werfen sie. Es erscheint Kopf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die faire Münze gewählt haben. *(3 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Sei $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C, D, E \in \mathcal{B}$ mit $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

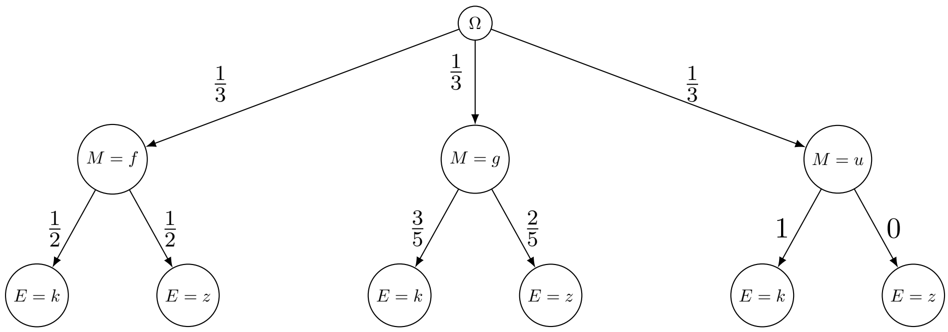
c) Die Ereignisse C, D und E seien vollständig unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines der Ereignisse C, D, E ein, wenn $P(C) = 0{,}15$ und $P(D) = 0{,}72$ und $P(E) = 0{,}95$ gilt? *(3 Punkte)*

d) Die Ereignisse A und $\overline{B}$ seien unabhängig. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\overline{A}$ und B ebenfalls unabhängig sind. *(4 Punkte)*

Lösung

a) Zunächst wird folgende Notation eingeführt:

- Münze M: fair f, gezinkt g, unbekannt u
- Ergebnis E: Kopf k, Zahl z



Da die Münzen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen werden, gilt:

$$P(f) = P(g) = P(u) = \frac{1}{3}.$$

Laut Aufgabenstellung gilt zudem: $P(k) = \frac{7}{10}$.

Wahrscheinlichkeit für Kopf gegeben die unbekannte Münze wird geworfen $P(k|u)$:

$$\begin{aligned}
P(k) &= P(k|f)P(f) + P(k|g)P(g) + P(k|u)P(u) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \Big(P(k|f) + P(k|g) + P(k|u)\Big) \\
&\overset{!}{=} \frac{7}{10} \\
\Leftrightarrow \qquad P(k|u) &= 3 \cdot P(k) - P(k|f) - P(k|g) \\
&= \frac{3 \cdot 7}{10} - \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die unbekannte Münze ist maximal unfair, da sie in jedem Wurf “Kopf” zeigt.

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(M = f|E = k)$. Berechnung mittels Satz von Bayes:

$$P(M = f|E = k) = \frac{P(E = k|M = f)P(M = f)}{P(E = k)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{21}$$

c) Für die Wahrscheinlichkeit $P(C \cup D \cup E)$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(C \cup D \cup E) &= P\left(\overline{\overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E}}\right) = 1 - P(\overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E}) = 1 - P(\overline{C})P(\overline{D})P(\overline{E}) \\
&= 1 - \Big((1 - P(C)) \cdot (1 - P(D)) \cdot (1 - P(E))\Big) \\
&= 1 - 0{,}85 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}05 \\
&= 0{,}9881
\end{aligned}$$

d) Zu zeigen ist $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$:

$$\begin{aligned}
& & \boxed{P(A \cap \overline{B})} &= P(A)P(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow & \boxed{\boxed{P(A) + P(\overline{B})} - P(A \cup \overline{B})} &= P(A)P(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow & -\boxed{P\left(A \cup \overline{B}\right)} &= P(A)P(\overline{B}) \boxed{-P(A) - P(\overline{B})} \\
&\Leftrightarrow & -\boxed{P\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right)} &= \boxed{P(A)P(\overline{B}) - P(A)} - P(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow & \boxed{-1} + P(\overline{A} \cap B) &= \boxed{-P(A) \cdot \boxed{\Big(1 - P(\overline{B})\Big)}} - P(\overline{B}) \\
&\Leftrightarrow & P(\overline{A} \cap B) &= \boxed{\boxed{1} - P(\overline{B})} - P(A)\boxed{P(B)} \\
&\Leftrightarrow & P(\overline{A} \cap B) &= \boxed{\boxed{P(B)} - P(A)P(B)} \\
&\Leftrightarrow & P(\overline{A} \cap B) &= \boxed{P(B) \cdot \boxed{(1 - P(A)})} \\
&\Leftrightarrow & P(\overline{A} \cap B) &= \boxed{P(\overline{A})} \cdot P(B)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben ist die stetige Zufallsvariable X mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f_X(x) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{4}} + \frac{1}{4} \mathrm{rect}_b\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

mit der Konstanten $b = 2$ und der Rechteckfunktion $\mathrm{rect}_b(x) = \begin{cases} 1\,, & -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$

Die folgenden Teilaufgaben können alle unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) Skizzieren Sie $f_X(x)$ qualitativ. *(4 Punkte)*

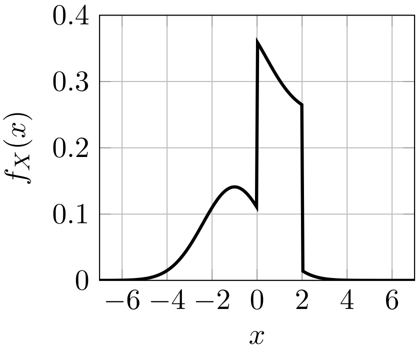
b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Konstante $b = 2$ ist. *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $-1 < X \leq 1$. *(4 Punkte)*

d) Bestimmen Sie den Modalwert von $f_X(x)$ und begründen Sie, ob der Median von $f_X(x)$ positiv oder negativ ist. *(4 Punkte)*

Lösung

a) **Hinweis**: Für die qualitative Skizze reicht eine Normalverteilung mit überlagertem, nach rechts verschobenem Rechteck.



b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte muss normiert sein, d.h.

$$\begin{aligned}
1 &\overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{4}} + \frac{1}{4}\mathrm{rect}_b\left(x - \frac{b}{2}\right)\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2}} \mathrm{d}x}_{=1} + \int_0^b \frac{1}{4} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(b - 0) \\
&\Rightarrow b = 2\,.
\end{aligned}$$

c) Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion muss die x-Achse unterteilt werden. Für $x < 0$ ergibt sich:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} \mathrm{e}^{-\frac{(t+1)^2}{2\cdot 2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\,.$$

Für $0 \le x \le b$ ergibt sich:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \int_0^x \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x}{4} \; .$$

Für $x > b$ ergibt sich:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \; .$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $-1 < X \le 1$ist, ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} P(-1 < X \le 1) = F_X(1) - F_X(-1) &= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{-1+1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Phi\left(\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\Phi(0) \approx \frac{0{,}92}{2} = 0{,}46 \; . \end{aligned}$$

d) Der Modalwert ist das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte. Betrachtet man die beiden Einzelterme, dann gibt es aufgrund der Symmetrien und der Form der Terme nur zwei Positionen, an denen der Modalwert liegen kann. Falls das Maximum der gewichteten Normalverteilung (entspricht ihrem Mittelwert) innerhalb des Bereichs liegt, in welchem die Rechteckfunktion ungleich Null ist, dann ist es auch der Modalwert. Andernfalls ist der Modalwert jenes Ende der Rechteckfunktion, welches am nächsten zum Mittelwert der Normalverteilung liegt.
Da der Mittelwert der Normalverteilung $\mu = -1 < 0 < b$, ist der Modalwert $x_{\mathrm{mod}} = \arg\max_x f_X(x) = 0$.

Der Median ist definiert als $F_X(x) \overset{!}{=} 1/2$.
Da $F_X(x)$ eine monoton steigende Funktion ist, kann durch Einsetzen getestet werden, dass $F_X(0) \approx \frac{1}{2}\Phi(0{,}70) \approx 0{,}379 < \frac{1}{2}$. Somit muss der Median größer Null, also positiv sein.
Alternativer Lösungsweg: Da die Wahrscheinlichkeitsdichte aus einer Überlagerung besteht, wobei beide Terme jeweils mit einhalb gewichteten Dichtefunktionen entsprechen, haben beide Terme jeweils die Masse einhalb. Da weiterhin die Normalverteilung eine unendliche Ausdehnung besitzt, muss der Median im Überlagerungsbereich der beiden Terme liegen, also zwischen 0 und b. Da bei 0 die Überlagerung erst beginnt, muss der Median positiv sein (kann auch durch einsetzen getestet werden).

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Die zweidimensionale Zufallsvariable $Z = (X, Y)^T$ sei im Gebiet G aus Abb. 1 gleichverteilt.

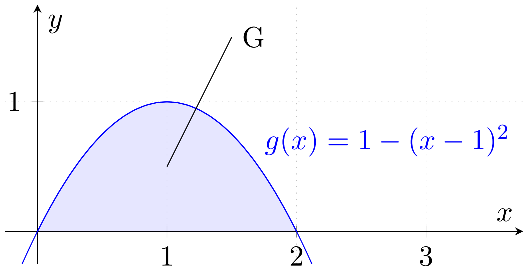


Abbildung 1: Gebiet G.

a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X und Y an. Beachten Sie den Definitionsbereich. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Beachten Sie die Definitionsbereiche. *(4 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$. Berechnen Sie damit den Erwartungswert von Y unter der Bedingung $X = x$ für $x = 0{,}5$ und $x = 1$. *(4 Punkte)*

d) Lesen Sie $E(X|Y = y)$ aus Abb. 1 ab und begründen Sie Ihre Antwort. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Die Fläche G wird durch die quadratische Funktion $g(x)$ und die x-Achse begrenzt. Die Funktion $g(x)$ kann aus Abb. 1 abgelesen werden und ist: $g(x) = 1 - (x - 1)^2$.

Da Z auf G gleichverteilt ist, gilt:

$$f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} a\ , & 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - (x-1)^2 \\ 0\ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit $f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist, muss folgendes gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1,$$

woraus für die Konstante a folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_0^{1-(x-1)^2} a \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = a \int_0^2 1 - (x-1)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= a \left[x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = a \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{4}{3} a \stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \qquad a &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist die Dichte $f_Z(z)$ gegeben durch:

$$f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}\ , & 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - (x-1)^2 \\ 0\ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) - Berechnen der Randdichte $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \int_0^{1-(x-1)^2} \frac{3}{4}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3}{4}y\right]_0^{1-(x-1)^2} = \frac{3}{4}\left(1-(x-1)^2\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Integrationsgrenzen berechnen:

$$y = 1-(x-1)^2 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y}$$

und berechnen der Randdichte $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} \frac{3}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x\right]_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} = \frac{3}{4}\cdot\left(1+\sqrt{1-y}-(1-\sqrt{1-y})\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{1-y} & \text{für } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Berechnen des bedingten Erwartungswerts $E(Y|X=x)$ über die bedingte Dichte von Y gegeben $X=x$:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\left(1-(x-1)^2\right)} = \frac{1}{1-(x-1)^2}$$

$$E(Y|X=x) = \int_0^{1-(x-1)^2} y\cdot f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1-(x-1)^2}\int_0^{1-(x-1)^2} y\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{1-(x-1)^2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-(x-1)^2} = \frac{1}{2}\left(1-(x-1)^2\right) = x - \frac{1}{2}x^2.$$

Berechne $E(Y|X=x)$ für $x = 0{,}5$ und $x = 1$:

- $E(Y|X=0.5) = \frac{3}{8} = 0{,}375$
- $E(Y|X=1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

d) Begründung:
Da $f_{X,Y}(x,y)$ symmetrisch zur Senkrechten $x=1$ ist, ist der bedingte Erwartungswert $E(X|Y=y)$ auf dem Interval $[0,1]$ unabhängig von y. Es folgt $E(X|Y=y) = 1\ \forall y \in [0,1]$.

Alternativ: Nachrechnen liefert

$$E(X|Y=y) = \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} x\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}(2\sqrt{1-y})}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} = \frac{4\sqrt{1-y}}{4\sqrt{1-y}} = 1\ \forall y \in [0,1]\,.$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \tag{B.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{B.7}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{C.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\Big(a \sin(bx) - b \cos(bx)\Big) \tag{C.5}$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \tag{C.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \tag{C.8}$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{D.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{D.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{D.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{D.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{D.5}$$