Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Nachrichtentechnik
Prof. Dr.-Ing. Laurent Schmalen
Prof. Dr.-Ing. Peter Rost

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung

Wahrscheinlichkeitstheorie

26.09.2024

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Beachten Sie, dass in Aufgabe 6 zwischen zwei Aufgaben gewählt werden muss. **Bearbeiten Sie entweder Aufgabe 6.1 oder Aufgabe 6.2**!
Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.
Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.
Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig handschriftlich beschriebenes **A4-Blatt** (kein formatiertes Dokument, wie LaTeX, Word, etc.) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **17.10.2024** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **24.10.2024** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **30.10.2024** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

In einer undurchsichtigen Tasche befinden sich insgesamt je 5 rote, gelbe und blaue Bälle. Sie ziehen ohne Zurücklegen 2 Bälle aus der Tasche. Die Zufallsvariable X bezeichnet die gezogene Anzahl an roten Bällen.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von X. *(2 Punkte)*

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *(2 Punkte)*

c) Bestimmen Sie die Varianz von X. *(2 Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

In einem weiteren Zufallsexperiment werden zufällig 6 Bälle aus der Tasche gezogen, nach Farben gruppiert und absteigend nach der Anzahl angeordnet. Die Notation (a, b, c) beschreibt das Ergebnis nach dem Ordnen, wobei $a \geq b \geq c$ und $a + b + c = 6$.
Wenn beispielsweise beim ersten Mal 3 rote Kugeln, 2 gelbe Kugeln und 1 blaue Kugel gezogen wurden und beim zweiten Mal 2 rote Kugeln, 1 gelbe Kugel und 3 blaue Kugeln, werden beide Fälle als $(3, 2, 1)$ gezählt und als dasselbe Ergebnis betrachtet.

d) Definieren Sie *formal* den Wahrscheinlichkeitsraum Ω der möglichen Ergebnisse dieses Experimentes. *(3 Punkte)*

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $(4, 2, 0)$. *(3 Punkte)*

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $(3, 3, 0)$. *(3 Punkte)*

Lösung

a) Für die Verteilung rechnet man:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{45}{105}$$
$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{1}}{\binom{15}{2}} = \frac{50}{105}$$
$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{0}}{\binom{15}{2}} = \frac{10}{105}$$

b) Der Erwartungswert ergibt sich durch direkte Rechnung:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{2} iP(X = i) = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}$$

c) Die Varianz folgt zu:

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=0}^{2} P(X = i)(i - \mathbb{E}(X))^2 = \frac{26}{63}$$

d) Der formale Wahrscheinlichkeitsraum entsteht durch die gegebenen Randbedingungen zu:

$$\Omega = \left\{(a, b, c) \in \{0, 1, \dots, 6\}^3 : a \geq b \geq c, a + b + c = 6\right\}$$

e) Aus dem Laplace-Ansatz folgt durch Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge:

$$\frac{\binom{5}{4}\binom{5}{2}\binom{5}{0}\cdot 3!}{\binom{15}{6}} = \frac{5\cdot 10\cdot 1\cdot 6}{5005} = \frac{300}{5005} \approx 0.0599.$$

Der Faktor 3! beschreibt hierbei die mögliche Anzahl an Tupeln, die nach dem Ordnen auf $(4, 2, 0)$ führen.

f) Ähnlich zur vorherigen Teilaufgabe ergibt sich:

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{5}{3}\binom{5}{0}\binom{3}{1}}{\binom{15}{6}} = \frac{10\cdot 10\cdot 1\cdot 3}{5005} = \frac{300}{5005} \approx 0.0599.$$

Hier entsteht der Binomialkoeffizient durch Auswahl der Position der 0.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Sie haben 2 identische Computer für eine Monte-Carlo-Simulation mit insgesamt 10 Aufgaben. Die Zeiten, die jeder Computer pro Aufgabe benötigt, können als unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, 10$, modelliert werden.
Zur Durchführung Ihrer gesamten Simulation stehen zwei Strategien zur Verfügung:

- Strategie 1: Sie geben beiden Computern je eine Aufgabe. Nachdem **beide** Computer ihre jeweilige Aufgabe beendet haben, wird jedem Computer eine weitere Aufgabe zugewiesen, bis die Simulation abgeschlossen ist. Die Zufallsvariable W_1 beschreibt die Zeitdauer, bis 2 parallele Aufgaben bearbeitet werden.
- Strategie 2: Teile alle Aufgaben in 2 Gruppen mit je 5 Aufgaben auf und weise sie den Computern zu. Jeder Computer bearbeitet seine 5 Aufgaben der Reihe nach, unabhängig von dem anderen Computer. Die Zeit bis **beide** Computer alle 5 Aufgaben erledigt haben, wird durch die Zufallsvariable W_2 bezeichnet.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{W_1}(w)$ von W_1 in Abhängigkeit der Dichte und Verteilungsfunktion der Normalverteilung an. *(4 Punkte)*

b) Wir bezeichnen die Zeit, die **ein** Computer in Strategie 2 benötigt, um alle 5 Aufgaben zu erledigen, mit der Zufallsvariable Y. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ von Y an. *(4 Punkte)*

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{W_2}(w)$ von W_2 an. *(4 Punkte)*

d) Vergleichen Sie die beiden Strategien und geben Sie an, welche im Durchschnitt weniger Zeit benötigt. *(3 Punkte)*

Hinweis: Das Integral
$$I_N = \int_{-\infty}^{\infty} xN\left(\Phi(x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
ist größer als 0, wenn $N > 1$ ist.

Lösung

a) Da auf **beide** Computer gewartet werden muss, ist die Wartezeit W_1 gegeben durch
$$W_1 = \max\{X_1, X_2\}.$$
Zuerst betrachten wir die Verteilungsfunktion von W_1, d. h. die Wahrscheinlichkeit $P(W_1 \leq w)$:
$$\begin{aligned} P(W_1 \leq w) &= P(X_1 \leq w, X_2 \leq w) \\ &= \left(P(X \leq w)\right)^2 \\ &= \left(P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{w-\mu}{\sigma}\right)\right)^2 \\ &= \left(\Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)\right)^2. \end{aligned}$$
Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist dann ist die Ableitung von $P(W_1 \leq w)$ nach w:
$$\begin{aligned} f_{W_1}(w) &= \frac{\mathrm{d}P(W_1 \leq w)}{\mathrm{d}w} \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}. \end{aligned}$$

b) Die Zufallsvariable Y ist die Summe von 5 normalverteilten Zufallsvariable $X_i, i = 1, \dots, 5$. Y ist dann auch normalverteilt mit dem Erwartungswert 5μ und der Varianz $5\sigma^2$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5\sigma^2}} e^{-\frac{(y-5\mu)^2}{10\sigma^2}}.$$

c) Von den Ergebnissen der Teilaufgaben 1 und 2 haben wir:

$$P(W_2 \le w) = \left(\Phi\left(\frac{w-5\mu}{\sqrt{5}\sigma}\right)\right)^2$$

und

$$f_{W_2}(w) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{w-5\mu}{\sqrt{5}\sigma}\right) \cdot \varphi\left(\frac{w-5\mu}{\sqrt{5}\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}\sigma}.$$

d) Der Erwartungswert von W_1 ist:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot 2\Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)\varphi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}w \\
&= \mu + \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot 2\Phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\varphi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}w \\
&= \mu + \sigma\int_{-\infty}^{\infty} w \cdot 2\Phi(w)\varphi(w)\,\mathrm{d}w \\
&= \mu + \sigma I_2.
\end{aligned}$$

Die Wartezeit der ersten Strategie ist 5 mal der Erwartungswert von W_1:

$$\tilde{W_1} = 5 \cdot \mathbb{E}\{W_1\} = 5\mu + 5\sigma I_2.$$

Der Erwartungswert von W_2 ist:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot 2\Phi\left(\frac{w-M\mu}{\sqrt{M}\sigma}\right)\varphi\left(\frac{w-5\mu}{\sqrt{5}\sigma}\right)\frac{1}{\sqrt{5}\sigma}\,\mathrm{d}w \\
&= 5\mu + \sqrt{5}\sigma I_2.
\end{aligned}$$

Da $5 > \sqrt{5}$ und $\sigma > 0,\ I_2 > 0$, haben wir $5\mathbb{E}(W_1) > \mathbb{E}(W_2)$. Deshalb ist die zweite Strategie besser als die erste.

Über die Positivität des Integrals I_N:

$$\begin{aligned}
I_N &= \int_{-\infty}^{\infty} xN\left(\Phi(x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} xN\left(\Phi(x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} xN\left(\Phi(x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} xN\left(\Phi(x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\infty} xN\left(\Phi(-x)\right)^{N-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} xN\left[\left(\Phi(x)\right)^{N-1} - \left(\Phi(-x)\right)^{N-1}\right]\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&> 0,
\end{aligned}$$

weil für $x > 0$

$$\left(\Phi(x)\right)^{N-1} - \left(\Phi(-x)\right)^{N-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} = 0$$

gilt.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Die Zufallsvariablen X und Y haben die Verbunddichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = a \cdot \sin(x+y), \quad 0 \leq x, \quad y \leq \frac{\pi}{2},$$

mit Parameter $a > 0$.

a) Bestimmen Sie die Konstante a und die Randdichten $f_X(x), f_Y(y)$. *(4 Punkte)*

b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x|Y=y)$. Argumentieren Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind. *(3 Punkte)*

c) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E(X|Y=y)$. *(4 Punkte)*

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von Teilaufgaben a)-c) bearbeitet werden.

Gegeben sind die folgenden Funktionen zweier beliebiger Zufallsvariablen X und Y mit Verbunddichte $f_{(X,Y)}(x,y)$:

$$U = \exp(X+Y), \quad V = 2 \cdot Y.$$

d) Berechnen Sie die Verbunddichte $f_{U,V}(u,v)$ in Abhängigkeit von der ursprünglichen Verbunddichte $f_{(X,Y)}(x,y)$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Achten Sie bei der Angabe von Wahrscheinlichkeitsdichten stets auf korrekte Definitionsbereiche.

Lösung

a) Der Parameter a ergibt sich durch Rechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \sin(x+y)\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x+y)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \\
&= a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + \cos(y)\mathrm{d}y \\
&= a \cdot \left[-\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right] \\
&= 2a \overset{!}{=} 1
\end{aligned}$$

Somit gilt $a = \frac{1}{2}$.

Die erste Randdichte ergibt sich durch Marginalisierung der gemeinsamen Dichte:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \sin(x+y)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos(x+y)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(y)+\cos(y)\right] \qquad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $f_X(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x)+\cos(x)\right],\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

b) Für die bedingte Dichte gilt:

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(y)+\sin(y)} \quad 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}.$$

Für $y = 0 = x$ gilt $f_X(0) = \frac{1}{2} \neq 0 = f_X(0|Y=0)$ sodass die Zufallsvariablen nicht unabhängig sind.

c) Der bedingte Erwartungswert ergibt sich durch Rechnung mit Hilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned} E(X|Y=y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f_X(x|Y=y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\cos(y)+\sin(y)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x+y)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\cos(y)+\sin(y)} \left([-x\cos(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\cos(y)+\sin(y)} \left(\frac{\pi}{2}\sin(y) + [\sin(x+y)]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\cos(y)+\sin(y)} \left(\frac{\pi}{2}\sin(y) + \cos(y) - \sin(y) \right) \\ &= 1 - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(y)}{\cos(y)+\sin(y)} \end{aligned}$$

d) Durch Umformung ergeben sich

$$\begin{aligned} V &= 2Y \\ \iff Y &= \frac{V}{2} =: h_2(U,V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \exp(X+Y) \\ \iff \ln(U) &= X+Y \\ \iff X &= \ln(U) - Y = \ln(U) - \frac{V}{2} =: h_1(U,V) \end{aligned}$$

Damit kann die Jacobi-Determinante berechnet werden:

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{J}) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} h_1(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} h_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u} h_2(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} h_2(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2u}. \end{aligned}$$

Für die gemeinsame Dichte ergibt sich somit

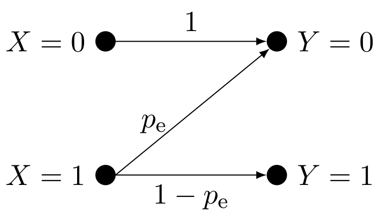
$$f_{U,V}(u,v) = \det(\boldsymbol{J}) \cdot f_{X,Y}(h_1(u,v), h_2(u,v)) = \frac{1}{4u}\sin(\ln(u)), \quad 1 < u < \exp(\pi)$$

Beachte, dass eigentlich $|\det(\boldsymbol{J})|$ zu verwenden ist. Der Betrag entfällt hier jedoch wegen $u > 0$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können alle unabhängig voneinander bearbeitet werden.

a) In einem sogenannten Z-Kanal werden gesendete Bits X gemäß der folgenden bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten auf empfangene Bits Y abgebildet.



Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Bits Y am Empfänger, wenn die Bits X am Sender gleich wahrscheinlich sind. *(3 Punkte)*

b) Zwei Spielerinnen S_1, S_2 führen *abwechselnd* ein Bernoulli-Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = P(X = 1)$ mit $0 < p < 1$ so lange aus, bis ein Treffer erzielt wird und die entsprechende Spielerin gewinnt.

Bestimmen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spielerinnen. Finden Sie eine Approximation für große Werte der Trefferwahrscheinlichkeit p *und begründen Sie* die Plausibilität der Approximation. *(4 Punkte)*

c) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für zwei beliebige Ereignisse $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$: *(3 Punkte)*

1) A und Ω sind stochastisch unabhängig.
2) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A$ und B sind stochastisch unabhängig.

d) In einem Zufallsexperiment würfeln Sie mit einem fairen dreiseitigen Würfel und bezeichnen dessen Augenzahl als $X = x$. Anschließend führen Sie ein zweites Zufallsexperiment mit einer Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, x\}$ durch. Das Ergebnis des zweiten Wurfes bezeichnen Sie als Z.

Bestimmen Sie die Verteilung von Z. *(5 Punkte)*

Lösung

a) Über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit rechnet man:

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(Y = 0|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 0|X = 1)P(X = 1) \\
&= 1 \cdot \frac{1}{2} + p_\mathrm{e} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + p_\mathrm{e}}{2} \\
P(Y = 1) &= P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) + P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) \\
&= 0 \cdot \frac{1}{2} + (1 - p_\mathrm{e}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - p_\mathrm{e}}{2}
\end{aligned}$$

b) Durch den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned}
P\left(S_1 \text{ gewinnt}\right) &= p + (1 - p)^2 p + (1 - p)^4 p + \cdots \\
&= p \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^{2k} \overset{0<p<1}{=} \frac{p}{1 - (1 - p)^2}
\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt der Ansatz die Zerlegung nach Anzahl der Versuche, sodass S_1 bei *ihrem* ersten, zweiten, ... Experiment einen Treffer erzielt. Dazu müssen die Versuche vor dem Treffer/Erfolg stets ein Misserfolg gewesen sein, wodurch die Faktoren $(1-p)^{2i}$, $i = 1, 2, \ldots$ entstehen.

Analog folgt:

$$P\left(S_2 \text{ gewinnt}\right) = (1-p)p + (1-p)^3 p + (1-p)^5 p + \cdots = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2}$$

Für $p \approx 1$ folgt $(1-p) \approx 0$ und somit:

$$\begin{aligned} P\left(S_1 \text{ gewinnt}\right) &= \frac{p}{1-(1-p)^2} \approx p \approx 1 \\ P\left(S_2 \text{ gewinnt}\right) &= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} \approx 1-p \approx 0 \end{aligned}$$

Begründung: Wenn die Trefferwahrscheinlichkeit sehr hoch ist, wird mit großer Wahrscheinlichkeit Spielerin S_1 direkt einen Treffer erzielen, sodass die zweite Spielerin nicht mehr werfen darf.

c) Nachweis:

1) Die Aussage „A und Ω sind stochastisch unabhängig“ ist richtig, da:

$$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega)$$

2) Die Aussage „$A \cap B = \emptyset \implies A$ und B sind stochastisch unabhängig“ ist falsch. Wegen

$$A \cap B = \emptyset \implies 0 = P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B)$$

sind in diesem Fall A, B nur stochastisch unabhängig, wenn $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$.

d) Aus den Gleichverteilungen folgt:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{1}{3}, \quad x \in \{1, \ldots, 3\} \\ P(Z = z | X = x) &= \frac{1}{x}, \quad z \in \{1, \ldots, x\} \end{aligned}$$

Somit folgt stets $1 \leq z \leq x$ und damit über den Satz von Bayes:

$$P(X = x | Z = z) = \frac{P(Z = z | X = x) \cdot P(X = x)}{P(Z = z)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}}{P(Z = z)}$$

Für die Verteilung von Z rechnet man mit den abkürzenden Schreibweisen $P_{Z|X}(z|x) = P(Z = z|X = x)$ und $P_X(x) = P(X = x)$:

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= P_{Z|X}(3|3) \cdot P_X(3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{2}{18} \\ P(Z = 2) &= P_{Z|X}(2|2) \cdot P_X(2) + P_{Z|X}(2|3) \cdot P_X(3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \\ P(Z = 1) &= P_{Z|X}(1|1) \cdot P_X(1) + P_{Z|X}(1|2) \cdot P_X(2) + P_{Z|X}(1|3) \cdot P_X(3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

In einem Spiel werden nacheinander 5 Kugeln jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p_u = \frac{1}{3}$ in eine von 3 Urnen gelegt. Sie gewinnen und erhalten 1 €, wenn in einer der Urnen mindestens 4 Kugeln liegen. Der Einsatz des Spiels beträgt α €.

a) Welcher Verteilung folgt die Aufteilung der Kugeln auf die Urnen? Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_g dafür, dass Sie das Spiel gewinnen. Bestimmen Sie α, sodass das Spiel fair ist. *(5 Punkte)*

Falls Sie Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $p_g = \frac{11}{81}$ weiter.

b) Sie spielen 10 000 Mal. Die Zufallsvariable A zählt wie viel Geld Sie durch Siege **ohne Abzug des Einsatzes** erhalten. Welcher Verteilung folgt A? Geben Sie den Erwartungswert und Varianz von A an. *(3 Punkte)*

c) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür nach oben ab, dass die Differenz von A zu $E(A)$ größer als 50 € ist. *(3 Punkte)*

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens 50 € mehr gewinnen als erwartet. Beurteilen Sie basierend auf diesem Ergebnis Ihre Abschätzung aus c). *(4 Punkte)*

Lösung

a) Die Aufteilung der Kugeln auf die Urnen folgt einer Multinomialverteilung/Polynomialverteilung. Die Gewinnwahrscheinlichkeit p_g beträgt:

$$\begin{aligned} p_g &= P(\max(U_1, U_2, U_3) \geq 4) \\ &= 3 \cdot P(U_1 = 5, U_2 = 0, U_3 = 0) + 3! P(U_1 = 4, U_2 = 1, U_3 = 0) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{5!}{5! \cdot 0! \cdot 0!} \cdot p_u^5 \cdot p_u^0 \cdot p_u^0 \right) + 3! \cdot \left(\frac{5!}{4! \cdot 1! \cdot 0!} \cdot p_u^4 \cdot p_u^1 \cdot p_u^0 \right) \\ &= \frac{11}{81} \end{aligned}$$

Das Spiel ist fair, wenn für den erwarteten Gewinn pro Spiel $p_g \cdot 1 - \alpha \overset{!}{=} 0$ gilt. Damit gilt für ein faires Spiel $\alpha = p_g = \frac{11}{81}$.

b) Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit Parametern $N = 10\,000$ und $p = p_g$. Für den Erwartungswert und die Varianz gilt somit (ohne Einheiten):

$$\begin{aligned} E(A) &= N \cdot p_g = 10000 \cdot \frac{11}{81} = \frac{110\,000}{81} \approx 1358{,}02 \\ V(A) &= N \cdot p_g \cdot (1 - p_g) = \frac{7\,700\,000}{6561} \approx 1173{,}02 \end{aligned}$$

c) Mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung kann die Wahrscheinlichkeit nach oben abgeschätzt werden:

$$P(|A - E(A)| \geq 50) \leq \frac{1}{50^2} \cdot V(A) = \frac{1173{,}02}{2500} \approx 0{,}4692$$

d) Da $V(A) > 9$ liegt eine hinreichende Anzahl an i.i.d. Realisierungen vor, sodass $A \sim \mathcal{N}(E(A); V(A))$ aufgrund des ZGWS angenommen werden kann.

$$\begin{aligned} p_d &= P(E(A) + 50 < A) \\ &= P\left(\frac{50}{\sqrt{V(A)}} < \frac{A - E(A)}{\sqrt{V(A)}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{V(A)}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\,(1{,}46) = 1 - 0{,}927\,855 = 0{,}072\,145 \end{aligned}$$

Für Abweichungen nahe um den Erwartungswert, kann in guter Approximation angenommen werden, dass $P(E(A) + 50 < A) \approx P(E(A) - 50 > A)$. Somit ergibt kann die Wahrscheinlichkeit für eine absolute Abweichung > 50 vom Erwartungswert durch $P(|A - E(A)| \geq 50) \approx 2 \cdot p_d = 0.14429$ approximiert werden. Das Ergebnis bestätigt die Abschätzung aus Teilaufgabe c). In diesem Fall wird deutlich, dass die Tschebyscheff'sche Ungleichung zwar eine geeignete erste Abschätzung liefert, jedoch unzureichend für die exakte Bestimmung der Wahrscheinlichkeit ist.

Aufgabe 6.1 (15 Punkte)

ACHTUNG! Bearbeiten Sie **entweder** Aufgabe 6.1 **oder** Aufgabe 6.2!

Ein Hersteller von elektronischen Bauteilen vermutet, dass die Anzahl fehlerhafter Mikroprozessoren pro Charge an Mikroprozessoren einer Poissonverteilung mit Erwartungswert $E(X) = 2$ folgt. In einer Stichprobe von 100 Chargen wurden folgende Häufigkeiten beobachtet:

Anzahl fehlerhafter Mikroprozessoren	0	1	2	3	≥ 4
Häufigkeit (Chargen)	11	23	29	20	17

Der Hersteller möchte testen, ob die Annahme der Poissonverteilung durch die Beobachtungen gestützt wird und verwendet hierzu einen χ^2-Test.

a) Bestimmen Sie die theoretischen Wahrscheinlichkeiten und die zu erwartenden absoluten Häufigkeiten unter den obigen Annahmen. *(4 Punkte)*

b) Formulieren Sie die Hypothese und die Alternative des Tests und bestimmen Sie die χ^2-Testgröße, um zu überprüfen, ob die beobachteten Häufigkeiten den zu erwartenden Häufigkeiten entsprechen. *(4 Punkte)*

c) Prüfen Sie, ob die Hypothese auf dem Niveau $\alpha = 0{,}05$ abgelehnt wird. Interpretieren Sie das Testergebnis und erklären Sie die Bedeutung in Bezug auf die Produktion, die eine konstante Fehlerrate an Mikroprozessoren erfordert. *(3 Punkte)*

Hinweis: Tabelle der χ^2-Verteilung in Anhang B.

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

d) Zeigen Sie, dass in dem statistischen Modell $(\mathcal{X}, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ für den Score

$$E_\vartheta(S) = 0$$

gilt. Zeigen Sie ausgehend davon, dass für die Fisher-Information $J(\vartheta) := V_\vartheta(S)$ der folgende Zusammenhang gilt:

$$J(\vartheta) = E_\vartheta(S^2).$$

Nehmen Sie an, das folgende Umformung zulässig ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x.$$

(4 Punkte)

Lösung

a) Die Poissonverteilung mit $E(X) = 2 = \lambda$ ist gegeben durch:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die theoretischen Wahrscheinlichkeiten für $k = 0, \ldots, 3$ und $k \geq 4$ sind:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{2^0}{0!}\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}1353 \\
P(X=1) &= \frac{2^1}{1!}\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2707 \\
P(X=2) &= \frac{2^2}{2!}\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}2707 \\
P(X=3) &= \frac{2^3}{3!}\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}1804 \\
P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X=k) \approx 1 - 0{,}8571 = 0{,}1429.
\end{aligned}$$

Somit sind die erwarteten absoluten Häufigkeiten bei $N = 100$ Chargen:

$$\begin{aligned}
h_{100}(X=0) &= N \cdot P(X=0) \approx 100 \cdot 0{,}1353 = 13{,}53 \\
h_{100}(X=1) &= N \cdot P(X=1) \approx 100 \cdot 0{,}2707 = 27{,}07 \\
h_{100}(X=2) &= N \cdot P(X=2) \approx 100 \cdot 0{,}2707 = 27{,}07 \\
h_{100}(X=3) &= N \cdot P(X=3) \approx 100 \cdot 0{,}1804 = 18{,}04 \\
h_{100}(X \geq 4) &= N \cdot P(X \geq 4) \approx 100 \cdot 0{,}1429 = 14{,}29.
\end{aligned}$$

b) Getestet wird, ob die Verteilung der defekten Mikroprozessoren einer Poissonverteilung mit $\lambda = 2$ entspricht. Entsprechend sind die Hypothesen:

- Nullhypothese H_0: Anzahl defekter Mikroprozessoren ist Poisson-verteilt mit $\lambda = 2$.
- Alternative H_1: Anzahl defekter Mikroprozessoren ist nicht Poisson-verteilt mit $\lambda = 2$.

Berechnung der χ^2-Testgröße (erwartete Abweichung von der Poissonverteilung):

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(y_k - h_{100}(X=k))^2}{h_{100}(X=k)} + \frac{(y_{\geq 4} - h_{100}(X \geq 4))^2}{h_{100}(X \geq 4)} \\
&= \frac{(11 - 13{,}53)^2}{13{,}53} + \frac{(23 - 27{,}07)^2}{27{,}07} + \cdots + \frac{(17 - 14{,}29)^2}{14{,}29} \\
&\approx 0{,}4731 + 0{,}6119 + 0{,}1376 + 0{,}2129 + 0{,}5139 = 1{,}9494.
\end{aligned}$$

c) Unter der Annahme der χ^2-Verteilung mit $k - 1 = 5 - 1 = 4$ Freiheitsgraden wird der Wert des $1 - \alpha$ Quantils aus der Tabelle in B abgelesen:

$$\chi^2_{k-1}(1-\alpha) = \chi^2_4(0{,}95) \approx 9{,}4877.$$

Da $t < \chi^2_{k-1}(1-\alpha)$, wird die Nullhypothese H_0 angenommen. Die Analyse deutet darauf hin, dass die Anzahl der fehlerhaften Mikroprozessoren pro Charge einer Poissonverteilung mit $\lambda = 2$ entspricht.

d) Zu zeigen ist $J(\vartheta) = E_\vartheta(S^2)$. Man rechnet:

$$\begin{aligned}
J(\vartheta) = V_\vartheta(S) = E_\vartheta\Big((S - E(S))^2\Big) &= E_\vartheta(S^2) - (E_\vartheta(S))^2 \\
&= E_\vartheta(S^2) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln(f_\vartheta(x)) \cdot f_\vartheta(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= E_\vartheta(S^2) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cancel{f_\vartheta(x)}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x)\right] \cdot \cancel{f_\vartheta(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= E_\vartheta(S^2) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= E_\vartheta(S^2) - \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \int_{-\infty}^{\infty} f_\vartheta(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= E_\vartheta(S^2) - \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} 1\right)^2 = E_\vartheta(S^2) - (0)^2 = E_\vartheta(S^2)
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6.2 (15 Punkte)

ACHTUNG! Bearbeiten Sie **entweder** Aufgabe 6.1 **oder** Aufgabe 6.2!

Frau Weber möchte nachhaltiger leben und hat beschlossen, zum Einkaufen solange es geht „alte“ Plastiktüten wiederzuverwenden. Aufgrund eines Verkaufsverbots von Plastiktüten kann Frau Weber keine neuen Plastiktüten erwerben. Sie besitzt jedoch zusätzlich zu ihrer primären Tüte noch zwei Reservetüten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Einkauf eine Tüte reißt und ersetzt werden muss, ist p mit $0 < p < 1$. Die Markoffkette $X[k]$, $k \in \mathbb{N}$, gibt an, wie viele Reservetüten am Ende des k-ten Einkaufs noch übrig sind.

a) Zeichnen Sie das Zustandsdiagramm für $X[k]$ und geben Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ der Markoffkette an. *(5 Punkte)*

b) Nach wie vielen Einkäufen sind erwartungsgemäß alle Reservetüten gerissen? *(3 Punkte)*

c) Bestimmen Sie $\boldsymbol{P}[k]$, die Übergangswahrscheinlichkeiten k-ter Stufe. *(4 Punkte)*

d) Berechnen Sie $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{P}[k]$. Welche Bedeutung hat das Ergebnis für $X[k]$? *(2 Punkte)*

e) Die Plastiktüten unterliegen nun einem Alterungsprozess, wodurch sich die Wahrscheinlichkeiten

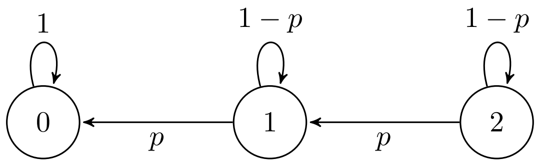
$$p[k] = \sqrt[11]{p^9[k-1]}$$

mit $p[0] > 0$ ergeben. Erläutern Sie kurz, welchen Einfluss dies auf die Markoffkette $X[k]$ hat (keine Rechnung erforderlich). *(1 Punkt)*

Lösung

a) Die Zustandsmenge $Z = \{0, 1, 2\}$ der Markoffkette ergibt sich aus der möglichen Anzahl an Reservetüten am Ende eines Einkaufs. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tüte bei einem Einkauf nicht reißt, ist $q = 1 - p$.

Somit ergibt sich der nachfolgende Übergangsgraph von $X[k]$:



mit der Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & p & q \end{pmatrix}.$$

b) Die zu erwartende Anzahl an Einkäufen bis keine Reservetüte mehr übrig ist, wird durch die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand $i = 0$ ($m_0 = 0$) berechnet:

$$m_1 = 1 + p \cdot m_0 + q \cdot m_1 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = \frac{1}{1-q}(1+0) = \frac{1}{p}$$
$$m_2 = 1 + p \cdot m_1 + q \cdot m_2 \quad \Longrightarrow \quad m_2 = \frac{1}{1-q}(1 + p \cdot m_1) = \frac{2}{p}.$$

Nach $2p^{-1}$ Einkäufen sind im Mittel alle Reservetüten gerissen.

c) Da die Markoffkette homogen ist, gilt $\boldsymbol{P}[k] = \boldsymbol{P}^k$ bzw.:

$$\boldsymbol{P}[k] = \boldsymbol{P}^k = \begin{pmatrix} p_{00}[k] & p_{01}[k] & p_{02}[k] \\ p_{10}[k] & p_{11}[k] & p_{12}[k] \\ p_{20}[k] & p_{21}[k] & p_{22}[k] \end{pmatrix}.$$

1. Zeile: Aufgrund des Verkaufsverbots kommen nie neue Reservetüten hinzu. Daher ist es nicht möglich mit k Schritten von Zustand i in Zustand $j > i$ zu gelangen und $p_{01}[k] = p_{02}[k] = 0$. Da $\boldsymbol{P}$ eine stochastische Matrix ist und $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$ gilt, ist $p_{00}[k] = 1$.

2. Zeile: Die Wahrscheinlichkeit in Zustand $i = 1$ zu verbleiben ist $p_{11}[k] = q^k$. Mit derselben Argumentation wie zuvor, gilt $p_{12}[k] = 0$ und somit auch:

$$p_{10}[k] = 1 - q^k - 0 = 1 - q^k = \sum_{n=1}^{k} \binom{k}{n} p^n q^{k-1}$$

Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit P(mindestens ein „Riss“ in k Versuchen) bzw. über das Gegenereignis $1 - P$(kein „Riss“ in k Versuchen).

3. Zeile: Die Wahrscheinlichkeit in Zustand $i = 2$ zu verbleiben ist $p_{22}[k] = q^k$. Wird in k Einkäufen **genau eine Reservetüte** benötigt (1 Einkauf aus k Einkäufen ohne Beachtung der Reihenfolge), gilt:

$$p_{10}[k] = \binom{k}{1} p^1 q^{k-1} = kpq^{k-1}$$

und folglich auch:

$$p_{20}[k] = 1 - q^k - kpq^{k-1} = 1 - q^{k-1}(kp - q) = \sum_{n=2}^{k} \binom{k}{n} p^n q^{k-1}$$

Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit P(mindestens zwei „Risse“ in k Versuchen).

Zusammenfassend sind die Übergangswahrscheinlichkeiten k-ter Stufe:

$$\boldsymbol{P}[k] = \boldsymbol{P}^k = \begin{pmatrix} p_{00}[k] & p_{01}[k] & p_{02}[k] \\ p_{10}[k] & p_{11}[k] & p_{12}[k] \\ p_{20}[k] & p_{21}[k] & p_{22}[k] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^k & q^k & 0 \\ 1 - q^{k-1}(kp - q) & kpq^{k-1} & q^k \end{pmatrix}.$$

d) Wegen $q = 1 - p < 1$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{P}[k] = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^k & q^k & 0 \\ 1 - q^{k-1}(kp - q) & kpq^{k-1} & q^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Ergebnis bestätigt (siehe auch das Zustandsdiagramm), dass Zustand 0 absorbierend ist. Es ist „fast sicher“, dass alle Irrfahrten in Zustand 0 enden und alle Ersatztüten verbraucht werden.

e) Durch den Alterungsprozess sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zeitabhängig. Dadurch ist der Markoffprozess nicht länger homogen.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung/ *Standard Normal Distribution Table*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Tabelle der χ^2-Verteilung

k	$\chi_k^2(0{,}01)$	$\chi_k^2(0{,}05)$	$\chi_k^2(0{,}1)$	$\chi_k^2(0{,}9)$	$\chi_k^2(0{,}95)$	$\chi_k^2(0{,}99)$	$\chi_k^2(0{,}995)$
1	0,000157	0,003932	0,015791	2,705543	3,841459	6,634897	7,879439
2	0,020101	0,102587	0,210721	4,605170	5,991465	9,210340	10,59663
3	0,114832	0,351846	0,584374	6,251389	7,814728	11,34487	12,83816
4	0,297109	0,710723	1,063623	7,779440	9,487729	13,27670	14,86026
5	0,554298	1,145476	1,610308	9,236357	11,07050	15,08627	16,74960
6	0,872090	1,635383	2,204131	10,64464	12,59159	16,81189	18,54758
7	1,239042	2,167350	2,833107	12,01704	14,06714	18,47531	20,27774
8	1,646497	2,732637	3,489539	13,36157	15,50731	20,09024	21,95495
9	2,087901	3,325113	4,168159	14,68366	16,91898	21,66599	23,58935
10	2,558212	3,940299	4,865182	15,98718	18,30704	23,20925	25,18818
11	3,053484	4,574813	5,577785	17,27501	19,67514	24,72497	26,75685
12	3,570569	5,226029	6,303796	18,54935	21,02607	26,21697	28,29952
13	4,106915	5,891864	7,041505	19,81193	22,36203	27,68825	29,81947
14	4,660425	6,570631	7,789534	21,06414	23,68479	29,14124	31,31935
15	5,229349	7,260944	8,546756	22,30713	24,99579	30,57791	32,80132
16	5,812212	7,961646	9,312236	23,54183	26,29623	31,99993	34,26719
17	6,407760	8,671760	10,08519	24,76904	27,58711	33,40866	35,71847
18	7,014911	9,390455	10,86494	25,98942	28,86930	34,80531	37,15645
19	7,632730	10,11701	11,65091	27,20357	30,14353	36,19087	38,58226
20	8,260398	10,85081	12,44261	28,41198	31,41043	37,56623	39,99685
21	8,897198	11,59131	13,23960	29,61509	32,67057	38,93217	41,40106
22	9,542492	12,33801	14,04149	30,81328	33,92444	40,28936	42,79565
23	10,19572	13,09051	14,84796	32,00690	35,17246	41,63840	44,18128
24	10,85636	13,84843	15,65868	33,19624	36,41503	42,97982	45,55851
25	11,52398	14,61141	16,47341	34,38159	37,65248	44,31410	46,92789
26	12,19815	15,37916	17,29188	35,56317	38,88514	45,64168	48,28988
27	12,87850	16,15140	18,11390	36,74122	40,11327	46,96294	49,64492
28	13,56471	16,92788	18,93924	37,91592	41,33714	48,27824	50,99338
29	14,25645	17,70837	19,76774	39,08747	42,55697	49,58788	52,33562
30	14,95346	18,49266	20,59923	40,25602	43,77297	50,89218	53,67196
35	18,50893	22,46502	24,79665	46,05879	49,80185	57,34207	60,27477
40	22,16426	26,50930	29,05052	51,80506	55,75848	63,69074	66,76596
45	25,90127	30,61226	33,35038	57,50530	61,65623	69,95683	73,16606
50	29,70668	34,76425	37,68865	63,16712	67,50481	76,15389	79,48998
55	33,57048	38,95803	42,05962	68,79621	73,31149	82,29212	85,74895
60	37,48485	43,18796	46,45889	74,39701	79,08194	88,37942	91,95170
70	45,44172	51,73928	55,32894	85,52704	90,53123	100,4252	104,2149
80	53,54008	60,39148	64,27784	96,57820	101,8795	112,3288	116,3211
90	61,75408	69,12603	73,29109	107,5650	113,1453	124,1163	128,2989
100	70,06489	77,92947	82,35814	118,4980	124,3421	135,8067	140,1695

C Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1 \tag{C.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1 \tag{C.2}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \qquad x \neq 1 \tag{C.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^r, \qquad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{C.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{C.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots = \ln(x), \qquad 0 < x \leq 2 \tag{C.6}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \qquad k \geq 1 \tag{C.7}$$

D Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x-x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{D.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1) \tag{D.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) \tag{D.3}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{D.4}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big) \tag{D.5}$$

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \qquad a \neq 0 \tag{D.6}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{D.7}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{D.8}$$

E Trigonometrie/*Trigonometry*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \tag{E.1}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \tag{E.2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{E.3}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{E.4}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{E.5}$$