

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
25.09.2025

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind ein beidseitig **handschriftlich** mit Bleistift, Kugelschreiber, auf Tablet o. Ä. beschriebenes und ausgedrucktes **A4-Blatt** (kein formatiertes Dokument, wie LaTeX, Word etc.) sowie ein **nicht programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **15.10.2025** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **22.10.2025** statt. Weitere Informationen finden Sie auf Ilias. Die mündliche Nachprüfung findet am **29.10.2025** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, davon 5 schwarze, 3 rote und 2 goldene Kugeln.

- a) Es werden nacheinander 5 **Kugeln mit Zurücklegen** gezogen: (4 Punkte)
- Wie viele verschiedene Farbsequenzen gibt es?
 - Berechnen Sie die Anzahl an Möglichkeiten, wenn nur die Farbkombinationen ohne Reihenfolge betrachtet werden.
 - Wie wahrscheinlich ist es, dass alle 5 Kugeln dieselbe Farbe besitzen?
- b) In einem Zufallsexperiment werden **3 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge** gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 gezogene Kugeln dieselbe Farbe haben. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Betrachtet wird ein Würfelwurf mit N fairen Würfeln. Die Zufallsvariable X beschreibt die Augensumme der N Würfel. Zusätzlich sei die Zufallsvariable Z die Anzahl unterschiedlicher Augenzahlen, die bei mindestens einem Würfelwurf vorkommen.

Beispiel: Beim Wurf von $N = 4$ Würfeln mit dem Ergebnis $(3, 1, 4, 1)$ gilt: $X = 9$ und $Z = 3$.

- c) Beschreiben Sie formal den Ergebnisraum Ω für $N = 4$. Wie wahrscheinlich ist eine Augensumme von 21? (4 Punkte)
- d) Bestimmen Sie für $N = 3$ die Verteilung von Z . Berechnen Sie damit $E(Z)$. (3 Punkte)
- e) Erläutern Sie, wie sich $E(Z)$ für $N \rightarrow \infty$ verhält. (2 Punkte)

Lösung

- a)
 - Es gibt $3^5 = 243$ verschiedene Farbsequenzen.
 - Ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es $\binom{5+3-1}{5} = 21$ verschiedene Farbkombinationen.
 - Die Wahrscheinlichkeit, 5 Mal die selbe Farbe zu ziehen setzt sich zusammen aus:

$$P = 0,5^5 + 0,3^5 + 0,2^5 = 0,034.$$

- b) Die Wahrscheinlichkeit, zweimal die selbe Farbe zu ziehen, lässt sich aus einer hypergeometrischen Verteilung wie folgt bestimmen:

$$P = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8}{120} = \frac{79}{120} \approx 0,658.$$

- c) Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{(i, j, k, l) : i, j, k, l \in (1, \dots, 6)\}$.
Mögliche Augenkombinationen für $X = 21$ sind $(3, 6, 6, 6)$, $(4, 5, 6, 6)$ und $(5, 5, 5, 6)$.
Zu diesen Kombinationen gibt es jeweils 4, 12 und 4 mögliche Sequenzen.
Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit für eine Augensumme von 21 als:

$$P(X = 21) = \frac{4 + 12 + 4}{6^4} = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324} \approx 0,0154.$$

- d) Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion von Z muss man berechnen, in wie vielen der 6^3 möglichen Würfeln jeweils ein, zwei, oder drei verschiedene Augenzahlen vorkommen. Somit ergibt sich $P(Z = z)$ als:

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \\ P(Z = 2) &= \frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{216} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12} \\ P(Z = 3) &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich der Erwartungswert wie folgt berechnen:

$$E(Z) = \sum_{z=1}^3 z \cdot P(Z = z) = \frac{6 \cdot 1 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 120}{216} = \frac{546}{216} = \frac{91}{36} \approx 2,528$$

- e) Wenn N gegen unendlich geht, geht die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Augenzahl in einem N -fachen Würfelwurf nicht vorkommt, gegen null. Somit kommen mit einer Wahrscheinlichkeit, die gegen 1 geht, alle 6 Augenzahlen vor. Für den Erwartungswert von Z folgt somit $\lim_{N \rightarrow \infty} E(Z) = 6$.

Beweis (nicht gefordert in der Klausur):

Sei I_k eine Indikatorfunktion, die 1 ist, wenn die Zahl $k \in \{1, \dots, 6\}$ mindestens einmal vorkommt und sonst null. Da die Würfel unabhängig sind, ist die erwartete Anzahl unterschiedlicher Augenzahlen:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^6 I_k = \sum_{k=1}^6 E(I_k) = \sum_{k=1}^6 P(I_k = 1) = \sum_{k=1}^6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right) = 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right).$$

Somit ist der Grenzwert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(Z) = \lim_{N \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right) = 6 \cdot (1 - 0) = 6$$

□

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Ein Hersteller überprüft die Qualität seiner Sensoren. Es gibt zwei Produktionslinien:

- Linie A stellt 60% aller Sensoren her und hat eine Ausschussquote von 1%.
- Linie B produziert die übrigen Sensoren und hat eine Ausschussquote von 2%.

Ein Sensor wird zufällig aus dem Lager entnommen und getestet:

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Sensor intakt ist? (3 Punkte)
- b) Ein Kontrollsystem meldet einen defekten Sensor. Eine zweite Kontrolle soll nur erfolgen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Sensor **aus Linie B stammt**, mindestens 70% beträgt. Ist eine Nachkontrolle erforderlich? (4 Punkte)

Eine Stichprobentest soll die Ausschussquote von Linie A bestätigen. Dazu werden 400 Sensoren **aus Linie A** zufällig gezogen und anschließend getestet. Der Test gilt als gescheitert, wenn die Anzahl der defekten Sensoren um **mehr als 2** vom Erwartungswert abweicht.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit scheitert der Test, obwohl die Ausschussquote bei Linie A von 1% korrekt ist? Nutzen Sie eine geeignete Approximation. (5 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- d) Gegeben sind zwei disjunkte Ereignisse A und B mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$. Zeigen Sie, dass A und B nicht unabhängig sein können. (3 Punkte)

Lösung

- a) Ereignis $D = \{\text{Sensor defekt}\}$.

$$\begin{aligned} P(\bar{D}) &= 1 - P(D) = 1 - (P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)) \\ &= 1 - (0,01 \cdot 0,6 + 0,02 \cdot 0,4) = 0,986. \end{aligned}$$

- b) Mit der Formel von Bayes:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{P(D|B)P(B)}{1 - P(\bar{D})} = \frac{0,02 \cdot 0,4}{(1 - 0,986)} \approx 0,571.$$

Da $P(B|D) \approx 0,571 < 0,7$ ist keine Nachkontrolle nötig.

- c) Sei X die Anzahl defekter Sensoren in der Stichprobe. Dann gilt:

$$X \sim \text{Bin}(N = 400, p = 0,01)$$

Der Erwartungswert ist $E(X) = Np = 400 \cdot 0,01 = 4$. Der Stichprobentest scheitert, wenn $|X - E(X)| > 2$, also $X < 2$ oder $X > 6$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(|X - E(X)| > 2) = P(X < 2 \cup X > 6) = 1 - P(2 \leq X \leq 6).$$

Da N groß und p klein ist, verwenden wir die Poisson-Approximation mit $\lambda = Np = 4$:

$$P(|X - E(X)| > 2) \approx 1 - \sum_{k=2}^6 \frac{4^k}{k!} e^{-4} \approx 1 - 0,147 - 0,195 - 0,195 - 0,156 - 0,104 = 0,203.$$

Der Test scheitert mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(|X - E(X)| > 2) \approx 0,203$.

Alternative: Die Normalapproximation $X \sim \mathcal{N}(4, 3,96)$ mit $\mu = \lambda$ und $\sigma^2 = Np(1-p) = 3,96$ liegt streng genommen außerhalb des *praktisch zulässigen* Bereichs des ZGWS, da $\sigma^2 < 9$. Dennoch liefert sie in diesem Fall eine hinreichend genaue Näherung und kann als korrekt angesehen werden. Mit Stetigkeitskorrektur $P\left(X \leq 2 - \frac{1}{2} \cup X \geq 6 + \frac{1}{2}\right)$:

$$\tilde{X}_1 = \frac{1,5 - 4}{\sqrt{3,96}} \approx -1,26, \quad \tilde{X}_2 = \frac{6,5 - 4}{\sqrt{3,96}} \approx 1,26$$

folgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\tilde{X} \leq -1,26 \cup \tilde{X} \geq 1,26) = 2P(\tilde{X} \geq 1,26) = 2(1 - P(\tilde{X} \leq 1,26)) \approx 0,208.$$

- d) Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$, folglich gilt $P(A, B) = 0$. Für Unabhängigkeit muss $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$ gelten. Da $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, ist $P(A) \cdot P(B) > 0$. Damit kann die Gleichung für Unabhängigkeit nicht erfüllt sein:

$$0 \neq P(A) \cdot P(B),$$

also sind A und B **nicht unabhängig**. □

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben ist die reellwertige Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

mit jeweils unabhängigen, gleichverteilten Einträgen:

$$A \sim \mathcal{U}(\{1, 2\}), \quad B \sim \mathcal{U}(\{1\}), \quad C \sim \mathcal{U}(\{0, 1, 3\}), \quad D \sim \mathcal{U}(\{1, 2\}).$$

Die Zufallsvariable $Z = \det(\mathbf{M}) \in \mathbb{R}$ sei die Determinante der Matrix.

- Bestimmen Sie die Verteilungen von $L := A \cdot D$ und $R := C \cdot B$. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie mithilfe der Verteilungen von L und R die Verteilung $P(Z = z)$ für alle möglichen Werte $z \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Matrix \mathbf{M} invertierbar? Welcher Verteilung folgt die folgende Zufallsvariable X , mit

$$X = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{M} \text{ invertierbar} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(3 Punkte)

Falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht bearbeitet haben, verwenden Sie die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{11}{12}$, dass \mathbf{M} invertierbar ist.

Es werden $N = 10\,000$ unabhängige Matrizen der Form \mathbf{M} erzeugt. Die Zufallsvariable X_i gibt an, ob die i -te Matrix invertierbar ist. Die Zufallsvariable

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

zählt die Anzahl der invertierbaren Matrizen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 9100 und 9250 Matrizen invertierbar sind. (5 Punkte)

Lösung

- Wir definieren:

$$L := A \cdot D, \quad R := C \cdot B.$$

Verteilung von $L = A \cdot D$

Da $A, D \in \{1, 2\}$, ergeben sich folgende gleichwahrscheinliche Kombinationen:

A	D	$L = A \cdot D$
1	1	1
1	2	2
2	1	2
2	2	4

und damit die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(L = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(L = 2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(L = 4) = \frac{1}{4}$$

Verteilung von $R = C \cdot B$

Da $C \in \{0, 1, 3\}$, $B \in \{1\}$, also:

C	B	$R = C \cdot B$
0	1	0
1	1	1
3	1	3

Da C 3 Werte hat und B 1, gibt es $3 \cdot 1 = 3$ gleichwahrscheinliche Kombinationen:

$$P(R = 0) = \frac{1}{3}, \quad P(R = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(R = 3) = \frac{1}{3}.$$

b) Gesucht ist die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Z = \det(\mathbf{M}) = AD - CB = L - R.$$

Verteilung von $Z = L - R$

Wir berechnen alle möglichen Kombinationen von L und R und deren Wahrscheinlichkeiten:

L	R	$Z = L - R$	$P(L) \cdot P(R)$
1	0	1	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
1	1	0	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
1	3	-2	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
2	0	2	$1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
2	1	1	$1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
2	3	-1	$1/2 \cdot 1/3 = 1/6$
4	0	4	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
4	1	3	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$
4	3	1	$1/4 \cdot 1/3 = 1/12$

Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(Z = z)$

$$P(Z = -2) = \frac{1}{12}$$

$$P(Z = -1) = \frac{1}{6}$$

$$P(Z = 0) = \frac{1}{12}$$

$$P(Z = 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(Z = 2) = \frac{1}{6}$$

$$P(Z = 3) = \frac{1}{12}$$

$$P(Z = 4) = \frac{1}{12}$$

c) Eine Matrix ist invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Damit ist die Zufallsvariable X eine Bernoulli-Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, wenn \mathbf{M} invertierbar ist, und 0, wenn nicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass \mathbf{M} nicht invertierbar ist, $P(Z = 0) = \frac{1}{12}$. Damit ist sie mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{11}{12}$ invertierbar.

d) Es gilt

$$E(S_n) = n \cdot p = 10\,000 \cdot \frac{11}{12} \approx 9166,67$$

$$V(S_n) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10\,000 \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12} \approx 763,89.$$

Da $V(S_n) > 9$ liegt eine hinreichende Anzahl an iid. Realisierungen vor, sodass $S_n \sim \mathcal{N}(E(S_n), V(S_n))$ aufgrund des ZGWS angenommen werden kann.

$$\begin{aligned}
 p_d &= P(9100 < S_n < 9250) \\
 &= P(S_n < 9250) - P(S_n < 9100) \\
 &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} < \frac{9250 - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right) - P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} < \frac{9100 - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right) \\
 &\approx \Phi\left(\frac{9250 - 9166,67}{\sqrt{763,89}}\right) - \Phi\left(\frac{9100 - 9166,67}{\sqrt{763,89}}\right) \\
 &\approx \Phi(3,014) - \Phi(-2,412) \\
 &\approx 0,998 - (1 - \Phi(+2,412)) \\
 &= 0,998 - (1 - 0,992) = 0,990
 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% sind zwischen 9100 und 9250 Matrizen invertierbar.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(2-x), & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass $f_X(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X ist: Berechnen Sie dazu den Wert der Konstante k und überprüfen Sie $f_X(x)$ auf die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte. (4 Punkte)
- Skizzieren Sie den Verlauf von $f_X(x)$ im Intervall $[-1, 3]$. Kennzeichnen Sie den Erwartungswert, Median und Modalwert der Verteilung. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung der Skizze. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P\left(\frac{1}{2} < X < 1 \mid X > \frac{1}{4}\right)$. (4 Punkte)

Lösung

- a) Damit $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss $f(x)$ normiert werden:

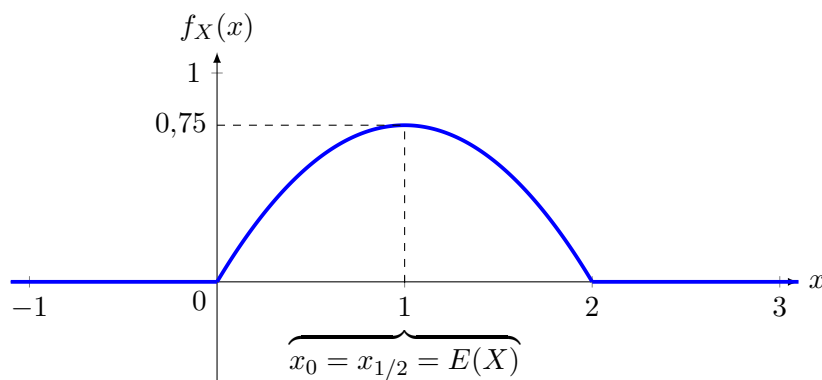
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= \int_0^2 kx(2-x) dx = k \int_0^2 (2x - x^2) dx \\ &= k \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = k \left(4 - \frac{8}{3} \right) = k \cdot \frac{4}{3} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow k &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Zusätzlich muss $f_X(x)$ nicht-negativ sein: Für $k = \frac{3}{4} > 0$ und $x \in [0, 2]$ ist $x \geq 0$ und $2 - x \geq 0$, also ist das Produkt $f(x) = kx(2-x) \geq 0$. Für alle $x \notin [0, 2]$ ist $f(x) = 0$.

$\Rightarrow f_X(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

- b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x) = \frac{3}{4}x(2-x)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel mit:
- Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 2$
 - Modalwert (lokales Maximum) bei $x_0 = 1$ mit $f_X(x_0) = \frac{3}{4}$
 - aufgrund der Symmetrie gilt $E(X) = x_{1/2} = x_0 = 1$

Skizze von $f_X(x)$:



c) Berechnung der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}x \leq 0: & \quad F_X(x) = 0 \\0 < x \leq 2: & \quad F_X(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{3}{4}t(2-t) dt = \frac{3}{4} \int_0^x (2t - t^2) dt \\& \quad = \frac{3}{4} \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = \frac{3}{4} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \\x > 2: & \quad F_X(x) = 1\end{aligned}$$

d) Mittels der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und $F_X(x)$ aus Teilaufgabe c):

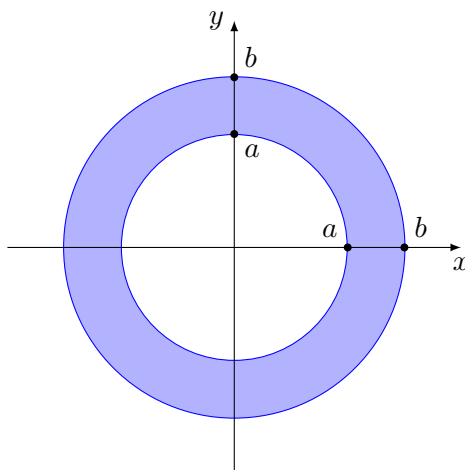
$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{2} < X < 1 \mid X > \frac{1}{4}\right) &= \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < 1 \cap X > \frac{1}{4}\right)}{P\left(X > \frac{1}{4}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)}{1 - P\left(X \leq \frac{1}{4}\right)} \\&= \frac{F_X(1) - F_X\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - F_X\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{32}}{1 - \frac{11}{256}} = \frac{88}{245} \approx 0,359.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Gegeben sei die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)^T$, deren Verbunddichte gegeben ist durch:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c, & a < \sqrt{x^2 + y^2} < b \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit den Konstanten $a, b, c > 0$ und $a < b$. Die Dichte ist in der folgenden Abbildung dargestellt, wobei der blau gefüllte Ring dem Bereich entspricht, in dem die Dichte konstant c ist.



- Bestimmen Sie die Konstante c in Abhängigkeit von a und b . (2 Punkte)
- Transformieren Sie die Zufallsvariable (X, Y) in Polarkoordinaten (R, Φ) und geben Sie die Verbunddichte $f_{(R,\Phi)}(r, \phi)$ an. (5 Punkte)
- Bestimmen Sie die Randdichten $f_R(r)$ und $f_\Phi(\phi)$. Untersuchen Sie, ob R und Φ unabhängig sind. (4 Punkte)
- Bestimmen Sie die bedingten Dichten $f_R(r|\phi)$ und $f_\Phi(\phi|r)$. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho_{R\Phi}$. (2 Punkte)

Lösung

- Die Fläche positiver Dichte beträgt $A = \pi(b^2 - a^2)$, daher ist $c = \frac{1}{A} = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)}$.
- $X = R \cdot \cos(\Phi)$, $Y = R \cdot \sin(\Phi)$. Die Jacobi-Matrix wird wie folgt aufgestellt:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} r \cdot \cos(\phi) & \frac{d}{d\phi} r \cdot \cos(\phi) \\ \frac{d}{dr} r \cdot \sin(\phi) & \frac{d}{d\phi} r \cdot \sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \cdot \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cdot \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Determinante als $|\det(\mathcal{J})| = |r \cdot \cos^2(\phi) + r \cdot \sin^2(\phi)| = r$. Für die transformierte Verbunddichte gilt $f_{R,\Phi}(r, \phi) = r \cdot f_{X,Y}(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))$. Es müssen noch die Grenzen angepasst werden. Die Fläche positiver Dichte wird beschrieben durch $a < r < b$ und $0 \leq \phi < 2\pi$. Die gesuchte Verbunddichte lautet schließlich:

$$f_{(R,\Phi)}(r, \phi) = \begin{cases} \frac{r}{\pi(b^2 - a^2)}, & a < r < b, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

c) Aufgrund von Rotationssymmetrie ist $f_{(R,\Phi)}(r, \phi)$ konstant bezüglich ϕ . Daraus folgen:

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{2r}{b^2-a^2}, & a < r < b \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_\Phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Prüfen der Abhängigkeit:

$$f_R(r) \cdot f_\Phi(\phi) = \frac{2r}{b^2-a^2} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{r}{\pi(b^2-a^2)} = f_{(R,\Phi)}(r, \phi)$$

für $a < r < b$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ und $f_R(r) \cdot f_\Phi(\phi) = 0 = f_{(R,\Phi)}(r, \phi)$ sonst.
 $\Rightarrow R$ und Φ sind unabhängig.

d) Da R und Φ unabhängig sind, entspricht die bedingte Dichte jeweils der Randdichte:
 $f_R(r|\phi) = f_R(r)$ und $f_\Phi(\phi|r) = f_\Phi(\phi)$.

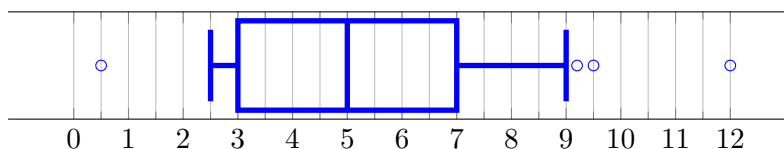
e) Aufgrund der Unabhängigkeit folgt $\rho_{R\Phi} = 0$.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können alle unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) Nennen Sie **zwei Bedingungen**, die erfüllt sein müssen, damit eine Stichprobe als einfache Stichprobe gilt. Wie muss eine Stichprobe vorverarbeitet werden, um daraus den Median oder Quantile bestimmen zu können? (3 Punkte)

Gegeben ist der folgende Boxplot:



- b) Lesen Sie aus dem Boxplot folgende Werte ab: den Median, die untere Quartilsgrenze, die größte normale Beobachtung. (3 Punkte)

Die Zufallsvariable $Z \in \mathbb{N}$ beschreibt die Studiendauer am KIT bis zum Abschluss der Promotion. Eine einfache Zufallsstichprobe mit $n = 6$ Studierenden ergab die folgenden Studiendauern:

$$z_1 = (28 \quad 22 \quad 25 \quad 26 \quad 25 \quad 24)$$

Durch fehlerhaftes Eintragen wurde für zwei weitere Studierende die Studiendauer 0 und 129 vermerkt. Die erweiterte Stichprobe lautet:

$$z_2 = (28 \quad 22 \quad 25 \quad 26 \quad 25 \quad 24 \quad 0 \quad 129)$$

- c) Berechnen Sie für beide Stichproben die **empirische Varianz** und den **Quartilsabstand**. Erklären Sie anhand der Ergebnisse einen Vorteil des Quartilsabstands gegenüber der Varianz als Maß für die Streuung. (4 Punkte)
- d) Gegeben sei eine Zufallsvariable $X \in \{0, 1\}$, die angibt, ob ein Ereignis eintritt. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens hängt von dem unbekanntem Parameter $\vartheta \in (0, 1)$ ab. Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des unbekanntem Parameters:

$$f_{\vartheta}(\vartheta) = 6\vartheta(1 - \vartheta),$$

Für eine einfache Stichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ ist die bedingte Dichte:

$$f_{\vartheta|\mathbf{X}}(\vartheta | \mathbf{x}) = \alpha \cdot \vartheta^{S+1}(1 - \vartheta)^{n-S-1}, \quad S = \sum_{i=1}^n x_i,$$

gegeben, wobei α ein geeigneter Normierungsfaktor ist, sodass $f_{\vartheta|\mathbf{X}}(\vartheta | \mathbf{x})$ eine bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_{\text{ML}}$. (5 Punkte)

Hinweis: Es gilt $\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln(f_{\mathbf{X}}(x)) = 0$.

Hinweis: Sie müssen nicht die zweite Ableitung zur Überprüfung der Art des Extremums bestimmen

Lösung

- a) Bei einer einfachen Stichprobe müssen die Komponenten der Stichprobe unabhängig und identisch verteilt sein. Für die Berechnung von Quantilen muss die Stichprobe zunächst sortiert werden, um die Position der Quantile zu bestimmen.
- b) Median: 5; Untere Quartilsgrenze: 3; Größte normale Beobachtung: 9.
- c) **Stichprobe z_1**

- Mit $\bar{z} = 25$ folgt für die empirische Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{z})^2 = 4,00$$

- Quartilsabstand:

$$Q_3 - Q_1 = 26 - 24 = 2$$

Stichprobe z_2

- Empirische Varianz:
Zunächst berechnen wir den Mittelwert:

$$\bar{z} = \frac{28 + 22 + 25 + 26 + 25 + 24 + 0 + 129}{8} = 34,875$$

Dann ergibt sich die empirische Varianz zu:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 12\,525,84$$

- Quartilsabstand:

$$Q_1 = \frac{22 + 24}{2} = 23, \quad Q_3 = \frac{26 + 28}{2} = 27, \implies Q_3 - Q_1 = 4,0$$

Der Quartilsabstand ist robuster gegenüber Ausreißern.

- d) **Herleitung der Likelihood-Funktion** Mit dem Satz von Bayes ergibt sich für die Likelihood-Funktion:

$$f_{\mathbf{X}|\vartheta}(\mathbf{x} | \vartheta) = \frac{f_{\vartheta|\mathbf{X}}(\vartheta | \mathbf{x}) \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{f_{\vartheta}(\vartheta)} = \frac{\alpha \vartheta^{S+1} (1-\vartheta)^{n-S+1}}{6\vartheta(1-\vartheta)} \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{6} \vartheta^S (1-\vartheta)^{n-S} \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

Damit ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion:

$$\ln(L_{\mathbf{x}}(\vartheta)) = \ln\left(\frac{\alpha}{6} \vartheta^S (1-\vartheta)^{n-S} \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right) = S \ln(\vartheta) + (n-S) \ln(1-\vartheta) + \ln\left(\frac{\alpha}{6} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right)$$

Durch Ableiten der Log-Likelihood-Funktion und Nullsetzen der Ableitung erhalten wir den Maximum-Likelihood-Schätzer.

Ableitung der Log-Likelihood:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln(L_{\mathbf{x}}(\vartheta)) = \frac{S}{\vartheta} - \frac{n-S}{1-\vartheta} + 0 \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Umformen folgt

$$\frac{S}{\vartheta} = \frac{n-S}{1-\vartheta} \implies S(1-\vartheta) = (n-S)\vartheta$$

$$S - S\vartheta = n\vartheta - S\vartheta \implies S = n\vartheta \implies \hat{\vartheta}_{\text{ML}} = \frac{S}{n}.$$

Formelsammlung und Tabellen/*Formulary and Tables*

A Tabelle der Standardnormalverteilung/*Standard Normal Distribution Table*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Tabelle der χ^2 -Verteilung

k	$\chi_k^2(0,01)$	$\chi_k^2(0,05)$	$\chi_k^2(0,1)$	$\chi_k^2(0,9)$	$\chi_k^2(0,95)$	$\chi_k^2(0,99)$	$\chi_k^2(0,995)$
1	0,000157	0,003932	0,015791	2,705543	3,841459	6,634897	7,879439
2	0,020101	0,102587	0,210721	4,605170	5,991465	9,210340	10,59663
3	0,114832	0,351846	0,584374	6,251389	7,814728	11,34487	12,83816
4	0,297109	0,710723	1,063623	7,779440	9,487729	13,27670	14,86026
5	0,554298	1,145476	1,610308	9,236357	11,07050	15,08627	16,74960
6	0,872090	1,635383	2,204131	10,64464	12,59159	16,81189	18,54758
7	1,239042	2,167350	2,833107	12,01704	14,06714	18,47531	20,27774
8	1,646497	2,732637	3,489539	13,36157	15,50731	20,09024	21,95495
9	2,087901	3,325113	4,168159	14,68366	16,91898	21,66599	23,58935
10	2,558212	3,940299	4,865182	15,98718	18,30704	23,20925	25,18818
11	3,053484	4,574813	5,577785	17,27501	19,67514	24,72497	26,75685
12	3,570569	5,226029	6,303796	18,54935	21,02607	26,21697	28,29952
13	4,106915	5,891864	7,041505	19,81193	22,36203	27,68825	29,81947
14	4,660425	6,570631	7,789534	21,06414	23,68479	29,14124	31,31935
15	5,229349	7,260944	8,546756	22,30713	24,99579	30,57791	32,80132
16	5,812212	7,961646	9,312236	23,54183	26,29623	31,99993	34,26719
17	6,407760	8,671760	10,08519	24,76904	27,58711	33,40866	35,71847
18	7,014911	9,390455	10,86494	25,98942	28,86930	34,80531	37,15645
19	7,632730	10,11701	11,65091	27,20357	30,14353	36,19087	38,58226
20	8,260398	10,85081	12,44261	28,41198	31,41043	37,56623	39,99685
21	8,897198	11,59131	13,23960	29,61509	32,67057	38,93217	41,40106
22	9,542492	12,33801	14,04149	30,81328	33,92444	40,28936	42,79565
23	10,19572	13,09051	14,84796	32,00690	35,17246	41,63840	44,18128
24	10,85636	13,84843	15,65868	33,19624	36,41503	42,97982	45,55851
25	11,52398	14,61141	16,47341	34,38159	37,65248	44,31410	46,92789
26	12,19815	15,37916	17,29188	35,56317	38,88514	45,64168	48,28988
27	12,87850	16,15140	18,11390	36,74122	40,11327	46,96294	49,64492
28	13,56471	16,92788	18,93924	37,91592	41,33714	48,27824	50,99338
29	14,25645	17,70837	19,76774	39,08747	42,55697	49,58788	52,33562
30	14,95346	18,49266	20,59923	40,25602	43,77297	50,89218	53,67196
35	18,50893	22,46502	24,79665	46,05879	49,80185	57,34207	60,27477
40	22,16426	26,50930	29,05052	51,80506	55,75848	63,69074	66,76596
45	25,90127	30,61226	33,35038	57,50530	61,65623	69,95683	73,16606
50	29,70668	34,76425	37,68865	63,16712	67,50481	76,15389	79,48998
55	33,57048	38,95803	42,05962	68,79621	73,31149	82,29212	85,74895
60	37,48485	43,18796	46,45889	74,39701	79,08194	88,37942	91,95170
70	45,44172	51,73928	55,32894	85,52704	90,53123	100,4252	104,2149
80	53,54008	60,39148	64,27784	96,57820	101,8795	112,3288	116,3211
90	61,75408	69,12603	73,29109	107,5650	113,1453	124,1163	128,2989
100	70,06489	77,92947	82,35814	118,4980	124,3421	135,8067	140,1695

C Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad (\text{C.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1 \quad (\text{C.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 \quad (\text{C.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r, \quad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{C.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x), \quad 0 < x \leq 2 \quad (\text{C.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k \geq 1 \quad (\text{C.7})$$

D Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{D.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{D.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{D.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{D.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{D.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \quad a \neq 0 \quad (\text{D.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{D.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{D.8})$$

E Trigonometrie/*Trigonometry*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{E.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{E.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{E.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{E.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{E.5})$$