

Aufgabe 1

Eine Urne enthalte 2 grüne, 3 rote und 4 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel aus der Urne gezogen. Ist diese rot oder grün, so legt man sie beiseite und das Zufallsexperiment ist beendet. Ist die gezogene Kugel schwarz, so wird sie in die Urne zurückgelegt und es wird ein zweites Mal gezogen. Die gezogene Kugel wird dann, unabhängig von der Farbe, beiseite gelegt und das Zufallsexperiment ist damit beendet.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- eine rote Kugel
- eine schwarze Kugel

beiseite gelegt wurde.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Dichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$Y = \frac{1}{(X+1)^3}.$$

Aufgabe 3

Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X; Y)^T$ sei im Gebiet G aus Bild 1 wie folgt verteilt

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k \cdot (5-x-y) & \text{für } x,y \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

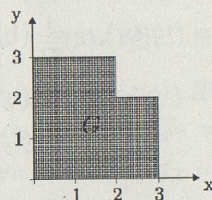


Bild 1: Gebiet G

- Berechnen Sie die Konstante k .
Hinweis: Zerlegen Sie die Fläche G in zwei rechteckige Teilflächen.
- Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.
- Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y abhängig voneinander sind.

Aufgabe 4

Die unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen X_1 , X_2 und X_3 mit den Verteilungen $\mathcal{N}_1(20, 16)$, $\mathcal{N}_2(10, 9)$ und $\mathcal{N}_3(0, 2)$, sollen zu einer neuen Zufallsvariablen Z wie folgt aufaddiert werden: $Z = X_1 + n \cdot X_2 + X_3$ mit $n \in \mathbb{N}$

- Bestimmen Sie die Verteilung $\mathcal{N}_Z$ von Z in Abhängigkeit von n .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Z zwischen 25 und 40 liegt für die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen $X(\xi)$ und $\Psi(\xi)$. $\Psi(\xi)$ ist gleichverteilt im Intervall $[0, \pi]$. Der Mittelwert $E(X(\xi)) = \mu_X$ und das zweite Moment $E(X^2(\xi)) = m_X$ seien bekannt. Mit Hilfe von $X(\xi)$ und $\Psi(\xi)$ wird ein stochastischer Prozess $Y(\xi, t)$ folgendermaßen definiert:

$$Y(\xi, t) = [X(\xi) + 1] \cdot \sin[2\pi f_0 t + \Psi(\xi)]$$

wobei f_0 eine reelle Konstante ist.

- Berechnen Sie den Scharmittelwert $E(Y(\xi, t))$.
- Berechnen Sie die Varianz $\sigma_Y^2(t) = c_{YY}(t, t)$.
- Berechnen Sie die AKF $\varphi_{YY}(t_1, t_2)$.
- Ist $Y(\xi, t)$ für $\mu_X \neq -1$ ein stationärer Prozess?

Aufgabe 6

Gegeben sei eine homogene Markoffkette mit den vier Zuständen: $Z = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ mit $i, j \in Z$ der Markoffkette sind in der folgenden Übergangsmatrix zusammengefasst:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,2 & 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Anfangszustand zum Zeitpunkt $n = 0$ sei 2.

- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen für die Übergangsmatrix $\overline{P}$.
- Berechnen Sie die Zustandsverteilung $\vec{p}(2)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Markoffkette zum Zeitpunkt $n = 2$ im Anfangszustand (Zustand 2) befindet?
- Wie groß ist die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 4?

Musterlösung zur Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2000/2001

AUFGABE 1

1. Zug 2. Zug

$$P(S_1) = P(S_2|S_1) = \frac{4}{9}$$

$$P(R_1) = P(R_2|S_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(G_1) = P(G_2|S_1) = \frac{2}{9}$$

$R = \{\text{„rote Kugel wurde beiseite gelegt“}\}$

$S = \{\text{„schwarze Kugel wurde beiseite gelegt“}\}$

a)

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R_1) + P(R_2|S_1) \cdot P(S_1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

b)

$$P(S) = P(S_2|S_1) \cdot P(S_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

AUFGABE 2

$$Y = \frac{1}{(X+1)^3}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{(X+1)^3} \leq y\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \leq X+1\right) \\ &= P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1 \leq X\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1\right) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \int_0^x 2e^{-2u} du = [-e^{-2u}]_0^x = 1 - e^{-2x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

I. Für $\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1 > 0$ gilt: $F_Y(y) = 1 - F_X(y^{-\frac{1}{3}} - 1)$

$$y^{-\frac{1}{3}} - 1 \leq 0: F_Y(y) = 1 - 0 = 1$$

$$0 < y < 1: F_Y(y) = 1 - \left(1 - e^{-2(y^{-\frac{1}{3}} - 1)}\right) = e^{-2y^{-\frac{1}{3}} + 2}$$

II. Für $\frac{1}{\sqrt[3]{y}} - 1 \leq 0$ gilt: $F_Y(y) = 1$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \leq 0 \\ e^{-2y^{-\frac{1}{3}} + 2} & \text{für } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{für } y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

I. $y < 1: f_Y(y) = -\frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot y^{-\frac{4}{3}} \cdot e^{-2y^{-\frac{1}{3}} + 2} = \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{4}{3}} \cdot e^{-2y^{-\frac{1}{3}} + 2}$

II. $y \geq 1: f_Y(y) = 0$

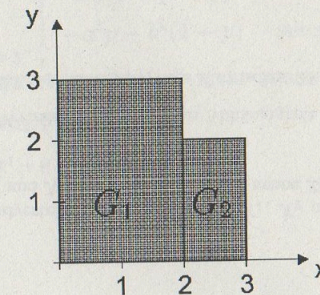
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} y^{-\frac{4}{3}} \cdot e^{-2y^{-\frac{1}{3}} + 2} & \text{für } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Alternative Lösung:

Berechnung von $f_Y(y)$ mit $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}$ und $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f(u) du$

AUFGABE 3

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$



Fläche G in zwei Rechtecke teilen:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\int_0^2 \int_0^3 f_{X,Y}(x,y) dy dx}^{G_1} + \overbrace{\int_2^3 \int_0^2 f_{X,Y}(x,y) dy dx}^{G_2} = 1 \\ & k \cdot \left[\int_0^2 \left[5y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 dx + \int_2^3 \left[5y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx \right] = 1 \\ & k \cdot \left[\int_0^2 (10,5 - 3x) dx + \int_2^3 (8 - 2x) dx \right] = 1 \\ & k \cdot \left[\left[10,5x - \frac{3x^2}{2} \right]_0^2 + \left[8x - x^2 \right]_2^3 \right] = 1 \\ & k \cdot (21 - 6 + 24 - 9 - 16 + 4) = 1 \\ & \Rightarrow k = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$b) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} \cdot \int_0^3 (5 - x - y) dy = \frac{1}{18} (10,5 - 3x) & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{18} \cdot \int_0^2 (5 - x - y) dy = \frac{1}{18} (8 - 2x) & \text{für } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

analog $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{18} (10,5 - 3y) & \text{für } 0 < y \leq 2 \\ \frac{1}{18} (8 - 2y) & \text{für } 2 < y \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- c) Für Unabhängigkeit muss gelten: $f_X \cdot f_Y = f_{X,Y}$
 Punkt (2,5;2,5) hat folgende Dichten: $f_X = f_Y = \frac{1}{6}$ aber $f_{X,Y} = 0$
 $\Rightarrow f_X \cdot f_Y \neq f_{X,Y} \Rightarrow X$ und Y sind **nicht** unabhängig!

AUFGABE 4

- a) Über den Additionssatz der Normalverteilung:

Allgemein: $Y = \sum_{m=1}^M X_m$ mit $\mathcal{N}(\mu_m; \sigma_m^2)$ folgt $\mathcal{N}_Y \left(\sum_{m=1}^M \mu_m; \sum_{m=1}^M \sigma_m^2 \right)$ mit
 $D^2(nX_2) = n^2 D^2(X_2)$ und $E(nX_2) = n \cdot E(X_2)$ folgt:

$$\mathcal{N}_Z(\mu_1 + n\mu_2 + \mu_3; \sigma_1^2 + n^2\sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

mit $\mu_1 = 20, \mu_2 = 10, \mu_3 = 0$ und $\sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 9, \sigma_3^2 = 2$ folgt:

$$\mathcal{N}_Z(20 + 10n; 18 + 9n^2)$$

$$b) \mathcal{N}_{Z,n=1}(30; 27)$$

$$\mathcal{N}_{Z,n=2}(40; 54)$$

$$\begin{aligned} P_{n=1}(25 < z \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40-30}{\sqrt{27}}\right) - \Phi\left(\frac{25-30}{\sqrt{27}}\right) \\ &\approx \Phi(1,92) + \Phi(0,96) - 1 \approx 0,9726 + 0,8315 - 1 \\ &= 0,8041 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{n=2}(25 < z \leq 40) &= \Phi\left(\frac{40-40}{\sqrt{54}}\right) - \Phi\left(\frac{25-40}{\sqrt{54}}\right) \\ &\approx \Phi(0) - 1 + \Phi(2,04) \approx 0,5 - 1 + 0,9793 \\ &= 0,4793 \end{aligned}$$

AUFGABE 5

$$a) f_{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E\{(x+1) \cdot \sin(2\pi f_0 t + \Psi)\} \\ &= E\{(x+1)\} \cdot E\{\sin(2\pi f_0 t + \Psi)\} \\ &= (\mu_x + 1) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2\pi f_0 t + \psi) d\psi \\ &= (\mu_x + 1) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\cos(2\pi f_0 t + \psi) \right]_0^{\pi} \\ &= (\mu_x + 1) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(2\pi f_0 t + \pi) + \cos(2\pi f_0 t)) \\ &= \frac{2}{\pi} (\mu_x + 1) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 E(Y^2(t)) &= E\{(x+1)^2 \cdot \sin^2(2\pi f_0 t + \Psi)\} \\
 &= E\{x^2 + 2x + 1\} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\psi) \right) d\psi \\
 &= (m_x + 2\mu_x + 1) \cdot \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\psi}{2} \right]_0^\pi - \underbrace{\frac{1}{4} \left[\sin(4\pi f_0 t + 2\psi) \right]_0^\pi}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(m_x + 2\mu_x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_Y^2(t) = E(Y^2(t)) - E^2(Y(t)) = \frac{1}{2}(m_x + 2\mu_x + 1) - \frac{4}{\pi^2}(\mu_x + 1)^2 \cos^2(2\pi f_0 t)$$

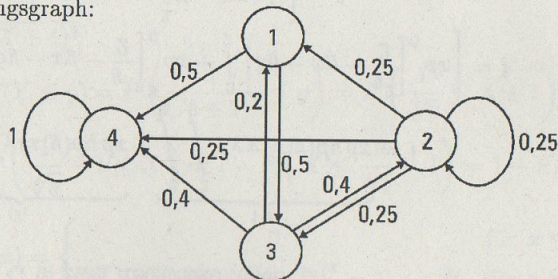
c)

$$\begin{aligned}
 \varphi_{YY}(t_1, t_2) &= E\{(x+1)^2 \cdot \sin(2\pi f_0 t_1 + \Psi) \cdot \sin(2\pi f_0 t_2 + \Psi)\} \\
 &= (m_x + 2\mu_x + 1) \cdot \frac{1}{2} E\{\cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) + \cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\Psi)\} \\
 &= \frac{1}{2}(m_x + 2\mu_x + 1) \frac{1}{\pi} \left(\pi \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)) + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\sin(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\psi) \right]_0^\pi}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(m_x + 2\mu_x + 1) \cdot \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2))
 \end{aligned}$$

d) AKF ist nur von $t_1 - t_2$ abhängig; aber der Erwartungswert $E(Y(t))$ ist für $\mu_x \neq -1$ nicht konstant! Damit ist der Prozess $\Psi(\xi, t)$ **nicht stationär**.

AUFGABE 6

a) Übergangsgraph:



b) $\vec{p}(2) = \vec{p}(0) \cdot P^{-2}$ mit $\vec{p}(0) = (0, 1, 0, 0)$

$$P^{-2} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 & 0,7 \\ 0,1125 & 0,1625 & 0,1875 & 0,5375 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}(2) = (0,1125; 0,1625; 0,1875; 0,5375)$$

Wahrscheinlichkeit, dass die Markoffkette sich zum Zeitpunkt $n = 2$ im Zustand 2 befindet, ist 0,1625.

c) $m_i = 1 + \sum_{j=1}^N p_{ij} m_j$

(I.) $m_1 = 1 + 0,5m_3 + 0,5m_4$

(II.) $m_2 = 1 + 0,25m_1 + 0,25m_2 + 0,25m_3 + 0,25m_4$

(III.) $m_3 = 1 + 0,2m_1 + 0,4m_2 + 0,4m_4$

(IV.) $m_4 = 0$

(I.) in (III.) $m_3 = 1 + 0,2 + 0,1m_3 + 0,4m_2 \Rightarrow m_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{9}m_2$ (V.)

(V.) in (I.) $m_1 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9}m_2 = \frac{5}{3} + \frac{2}{9}m_2$ (VI.)

(II.), (VI.) in (II.) $m_2 = 1 + \frac{5}{12} + \frac{1}{18}m_2 + \frac{1}{4}m_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}m_2 \Rightarrow m_2 = 3$

Mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 4 beträgt 3.