

Aufgabe 1

Ein Zug fährt eine Strecke, bei der er am Bahnhof A und am Bahnhof B hält. Es sei bekannt, dass der Zug am Bahnhof A mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 und am Bahnhof B mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,07 unpünktlich ankommt. Die Wahrscheinlichkeit, dass er im Bahnhof B unpünktlich ankommt unter der Voraussetzung, dass er bereits im Bahnhof A unpünktlich ankam beträgt 0,6.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug im Bahnhof B pünktlich ankommt, falls er bereits im Bahnhof A pünktlich ankam?
- Es sei nun bekannt, dass der Zug im Bahnhof B unpünktlich war. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er auch im Bahnhof A unpünktlich war?
- Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit aus b), falls die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
{Zug kommt im Bahnhof B unpünktlich an unter der Voraussetzung, dass er bereits im Bahnhof A unpünktlich ankam}
gesenkt wird. Alle anderen in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten bleiben unverändert.

Aufgabe 2

Für die beiden Ereignisse A und B aus $\mathfrak{B}$ gelte $0 < P(A) < 1$ und $0 < P(B) < 1$. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

- Gilt $A \cap B = \emptyset$, sind A und B *nicht* unabhängig.
- Gilt $A \subset B$, sind A und B ebenfalls *nicht* unabhängig.

Aufgabe 3

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X; Y)^T$ besitze folgende Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2e-2} \cdot x^2 \cdot e^y & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$.
- Sind X und Y unabhängig (Begründung!)?
- Berechnen Sie $E\{X\}$, $E\{Y\}$ und $E\{X^2Y\}$.

Aufgabe 4

Bei einem Kurzfilmfestival werden 20 Kurzfilme direkt hintereinander (d.h. ohne Pause) gespielt. Die Filmlängen sind unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit einem Mittelwert von 15 Minuten und einer Standardabweichung von 5 Minuten.

Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Gesamtlänge der Vorführungen

- nicht länger als viereinhalb Stunden dauern.
- zwischen fünfeinhalb und sechs Stunden dauern.

Es sei jetzt bekannt, dass die Vorführungen des Festivals bereits seit fünfeinhalb Stunden laufen.

- Berechnen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit, dass die Vorführungen innerhalb der nächsten 30 Minuten enden.

Aufgabe 5

Gegeben sei der stochastische Prozess $X(\xi, t)$ mit

$$X(\xi, t) = \cos(2\pi t - \Omega(\xi)\pi).$$

Die Zufallsvariable $\Omega(\xi)$ sei dabei im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt.

- Zeichnen Sie eine Realisierung von $X(\xi, t)$ und geben Sie den zu dieser Realisierung gehörenden Wert von $\Omega(\xi)$ an.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E\{X(\xi, t)\}$ und vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich.
- Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion von $X(\xi, t)$.
- Ist $X(\xi, t)$ schwach stationär (Begründung!)?

Aufgabe 6

Bei einem Spiel wird solange eine Münze (eine Seite „Adler“, eine Seite „Zahl“) geworfen bis entweder „Zahl“ zweimal mehr (Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl“ um zwei höher als Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Adler“) auftritt als „Adler“ oder „Adler“ zweimal mehr auftritt als „Zahl“, dann endet das Spiel.

- Das Spiel kann als homogene Markoffkette modelliert werden. Zeichnen Sie den Übergangsgraphen des Spieles, mit der minimal möglichen Anzahl an Zuständen.
- Stellen Sie die Übergangsmatrix der Markoffkette auf.
- Berechnen Sie die Zustandsverteilung nach zwei Würfeln.

Musterlösung zur Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2001/2002

AUFGABE 1

$P(A)$ bzw. $P(B)$: Ws., dass Zug im Bahnhof A bzw. B verspätet ankommt.

$$P(A) = 0,05 \quad P(\bar{A}) = 0,95$$

$$P(B) = 0,07 \quad P(\bar{B}) = 0,93$$

$$P(B|A) = 0,60 \quad P(\bar{B}|A) = 0,40$$

a) $P(\bar{B}|\bar{A})$ gesucht.

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(\bar{B}|A) \cdot P(A) + P(\bar{B}|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \\ \Rightarrow P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{B}) - P(\bar{B}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{0,93 - 0,4 \cdot 0,05}{0,95} = 95,79\% \end{aligned}$$

b) $P(A|B)$ gesucht.

$$(1) \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0,6 \cdot 0,05}{0,07} = \frac{3}{7} = 42,86\%$$

c) $P(B|A)$ in (1) wird gesenkt $\rightarrow P(A|B)$ sinkt!

AUFGABE 2

A und B unabhängig $\Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

a) $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$:

$$A \cap B = AB = \emptyset \Rightarrow P(AB) = 0$$

$$\Rightarrow P(AB) \neq P(A) \cdot P(B) > 0 \quad (P(A) > 0, P(B) > 0)$$

$\Rightarrow A$ und B sind nicht unabhängig.

b) $A \subset B$ und $P(B) < 1$, $A \cap B = AB = A$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) > P(A) \cdot P(B) \quad (\text{da } P(B) < 1)$$

$$\Rightarrow P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow A$ und B sind nicht unabhängig.

AUFGABE 3

a) Randdichte $f_X(x)$:

$$-1 \leq x \leq 1: \quad f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2e-2} x^2 e^y dy = \frac{3}{2e-2} [x^2 e^y]_0^1 = \frac{3}{2} x^2$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randdichte $f_Y(y)$:

$$0 \leq y \leq 1: \quad f_Y(y) = \int_{-1}^1 \frac{3}{2e-2} x^2 e^y dx = \frac{3}{2e-2} \left[\frac{x^3}{3} \cdot e^y \right]_{-1}^1 = \frac{e^y}{e-1}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^y}{e-1} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) X und Y sind unabhängig falls $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ gilt.

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1:$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{2e-2} \cdot x^2 \cdot e^y = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{e^y}{e-1} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

sonst:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$\Rightarrow X, Y$ sind unabhängig!

c)

$$E\{X\} = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{2} \cdot x^2 dx = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0 \quad (\text{Symmetrie})$$

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= \frac{1}{e-1} \int_0^1 y \cdot e^y dy \stackrel{\text{Bronstein}}{=} \frac{1}{e-1} [e^y(y-1)]_0^1 \\ &= \frac{1}{e-1} (0 - (e^0 \cdot (0-1))) = \frac{1}{e-1} \end{aligned}$$

$$E\{X^2 \cdot Y\} \stackrel{X,Y \text{ unabh.}}{=} E\{X^2\} \cdot E\{Y\} = E\{Y\} \cdot \int_{-1}^1 \frac{3}{2} \cdot x^4 dx$$

$$= E\{Y\} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) \right) \cdot \frac{1}{e-1} = \frac{3}{5e-5}$$

AUFGABE 4

Nach 7.8-4 (Zentraler Grenzwertsatz) ergibt sich:

$$E\{X_n\} = 15 \text{ min.} \quad D(X_n) = 5 \text{ min.} \quad S_{20} = \sum_{n=1}^{20} X_n$$

$\Rightarrow S_{20}$ ist näherungsweise Gaußverteilt mit $\mathcal{N}_{20}(300 \text{ min.}, 500 (\text{min.})^2)$.

a)

$$P(S_{20} \leq 270 \text{ min.}) = \Phi\left(\frac{270 - 300}{22,36}\right) = 1 - \Phi(1,34) \approx 0,0901 \approx 9\%$$

b)

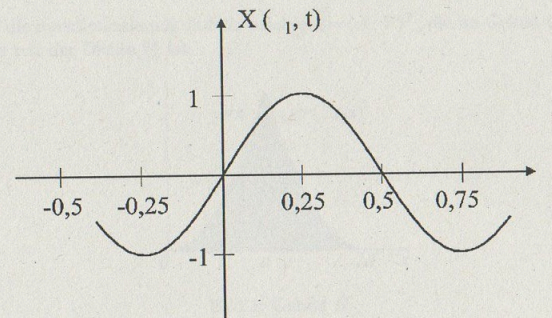
$$\begin{aligned} P(330 \text{ min.} \leq S_{20} \leq 360 \text{ min.}) &= \Phi\left(\frac{360 - 300}{22,36}\right) - \Phi\left(\frac{330 - 300}{22,36}\right) \\ &= \Phi(2,68) - \Phi(1,34) \\ &\approx 0,9963 - 0,9099 \\ &= 0,0864 = 8,64\% \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(S_{20} \leq 360 \text{ min.} | S_{20} \geq 330 \text{ min.}) &\stackrel{(3.1-1)}{=} \frac{P(330 \text{ min.} \leq S_{20} \leq 360 \text{ min.})}{P(S_{20} \geq 330 \text{ min.})} \\ &= \frac{0,0864}{1 - 0,9099} \\ &\approx 0,9592 = 95,92\% \end{aligned}$$

AUFGABE 5

a)

BILD 1. Realisierung für $\Omega(\xi_1) = \frac{1}{2}$

b)

$$f_\omega(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\{X(\xi, t)\} &= \int_0^1 f_\omega(\omega) \cos(2\pi t - \omega\pi) d\omega \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \sin(2\pi t - \omega\pi) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} (\sin(2\pi t) - \sin(2\pi t - \pi)) \\ &= \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

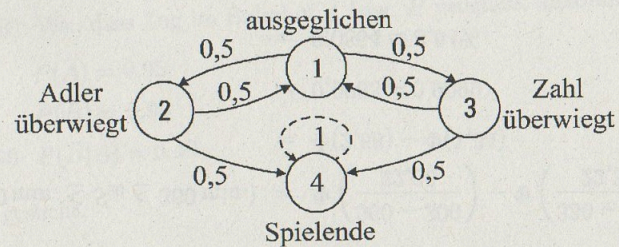
c)

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(t_1, t_2) &= E\{\cos(2\pi t_1 - \Omega\pi) \cdot \cos(2\pi t_2 - \Omega\pi)\} \\ &= \frac{1}{2} E\{\cos(2\pi(t_1 - t_2))\} + \frac{1}{2} E\{\cos(2\pi(t_1 + t_2 - 2\Omega\pi))\} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi(t_1 - t_2)) + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2\pi(t_1 + t_2 - 2\omega\pi)) d\omega}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

- d) Für schwache Stationarität muss der Erwartungswert konstant sein und $\varphi_{XX}(t_1 - t_2) = \varphi_{XX}(\tau)$ gelten.
 $\Rightarrow$ Erwartungswert von $X(\xi, t)$ ist nicht konstant
 $\Rightarrow X(\xi, t)$ ist nicht stationär!

AUFGABE 6

a) Übergangsgraph



Lösungen mit zwei absorbierenden Zuständen: Adler gewinnt / Zahl gewinnt (insgesamt 5 Zustände) und Lösungen mit Zusammenfassung der Zustände: Adler überwiegt / Zahl überwiegt (insgesamt 3 Zustände) wurden auch als richtig gewertet.

b)

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $\vec{p}^T(2) = \vec{p}^T(0) \cdot \overline{P}^2$ mit

$$\overline{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und $\vec{p}^T(0) = (1; 0; 0; 0)^T$ (Zustand 1 ist Startzustand)

$$\Rightarrow \vec{p}(2) = (1; 0; 0; 0)^T \cdot \overline{P}^2 = (0,5; 0; 0; 0,5)^T$$