

Aufgabe 1

Bei einer Marktstudie wurde einer bestimmten Personengruppe folgende beiden Fragen gestellt: „Besitzen Sie das Produkt A?“ und „Besitzen Sie das Produkt B?“. Als Auswertung der Studie wurden folgende Ergebnisse vorgestellt: 90% der befragten Personen gaben an das Produkt A zu besitzen und 70% gaben an das Produkt B zu besitzen. Weiterhin verweist die Studie darauf, dass 80% der Personen, die angaben Produkt A zu besitzen, auch angaben Produkt B zu besitzen. Warum sollten Sie die Ergebnisse dieser Studie anzweifeln (exakte Begründung angeben!)?

Aufgabe 2

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{für } 1 < x \leq e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechnen Sie den Wert der Konstanten c .
- Die Zufallsvariable Y sei über $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$ gegeben. Geben Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion von Y an.
- Berechnen Sie die Varianz von Y .

Aufgabe 3

Die zweidimensional normalverteilte Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1; X_2)^T$ ist durch die Parameter $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}$ und $\rho = \frac{1}{2}$ bestimmt.

- Geben Sie die Dichte von $\vec{X}$ an!
- Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4

Fünf Autos sollen auf einem Autoverladewaggon, der eine Nutzlänge von 22 m besitzt, verladen werden. Dabei seien die pro Auto benötigten Längen näherungsweise normalverteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathcal{N}(4,8 \text{ m}; 0,49 \text{ m}^2)$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die fünf Autos auf einen Waggon passen?
- Die für das erste Auto benötigte Länge sei jetzt bekannt. Wie groß muss diese sein, damit man die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in Aufgabenteil a) erhält?
Hinweis: Die für die anderen Autos benötigten Längen seien weiterhin unbekannt.
- Es sei jetzt bekannt, dass die für das erste Auto benötigte Länge 4 m beträgt. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die fünf Autos auf den Waggon passen?
Hinweis: Die für die anderen Autos benötigten Längen seien weiterhin unbekannt.

Aufgabe 5

$A(t)$ sei ein stationärer stochastischer Prozess mit der AKF $\varphi_{AA}(\tau)$ und der spektralen Leistungsdichte $\Phi_{AA}(f)$. Θ sei eine von $A(t)$ unabhängige, im Intervall $[\pi, 3\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

- den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X = \cos[2\pi f_c(2t + \tau) + 2\Theta]$,
- die AKF $\varphi_{YY}(\tau)$ des stationären stochastischen Prozesses $Y(t) = A(t)\cos[2\pi f_c t + 2\Theta]$ und
- die spektrale Leistungsdichte $\Phi_{YY}(f)$.

Aufgabe 6

Gegeben sei die in Bild 1 dargestellte homogene Markoffkette. Der Startzustand der Markoffkette sei mit der Wahrscheinlichkeit a der Zustand 1 und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - a$ der Zustand 4.

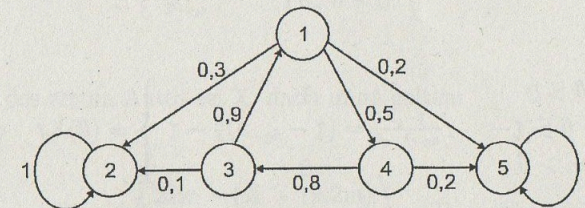


Bild 1: Zustandsdiagramm der Markoffkette

- Stellen Sie die Übergangsmatrix der Markoffkette auf.
- Geben Sie die Zustandsverteilung nach zwei Schritten an.
- Berechnen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand.

Musterlösung zur Klausur Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2002/2003

AUFGABE 1

Folgende Behauptungen wurden in der Studie vorgestellt

$$P(A) = 0,9$$

$$P(B) = 0,7$$

$$P(B|A) = 0,8$$

- Die Ergebnisse der Studie sollten angezweifelt werden, da sie in sich nicht stimmig sind:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \\ \Rightarrow P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) &= P(B) - P(B|A) \cdot P(A) \\ &= 0,7 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,7 - 0,72 = -0,02 \end{aligned}$$

Da Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sein können, stimmt mind. einer der in der Studie angegebenen Werte nicht!

- Anschaulich argumentiert, bedeutet dies: Laut Studie besitzen 90% Produkt A. Zudem sagt die Studie, dass von diesen Personen 80% Produkt B besitzen! Damit müssten alleine durch diese Personen das Produkt B von 72% (80% von 90%) besessen werden. Dies steht aber im Widerspruch zu den angegebenen 70%!

AUFGABE 2

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_1^e cx^2 dx = \left[\frac{cx^3}{3} \right]_1^e = c \cdot \frac{e^3 - 1}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{e^3 - 1}$$

b)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(\ln\left(\frac{1}{X}\right) \leq y\right) = P(e^{-y} \leq X) \\ &= 1 - P(X < e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ c \cdot \frac{x^3 - 1}{3} & 1 < x \leq e \\ 1 & e < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 1 - \frac{c}{3}(e^{-3y} - 1) = \frac{e^3 - e^{-3y}}{e^3 - 1} & -1 \leq y < 0 \\ 1 & 0 \leq y \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3e^{-3y}}{e^3 - 1} & -1 \leq y < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{c) Varianz: } D^2(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-1}^0 y \frac{3e^{-3y}}{e^3 - 1} dy = \left[\frac{3}{e^3 - 1} \frac{e^{-3y}}{9} (-3y - 1) \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1 + 2e^3}{3(e^3 - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-1}^0 y^2 \frac{3e^{-3y}}{e^3 - 1} dy = \left[\frac{3}{e^3 - 1} \left(\frac{y^2}{-3} - \frac{2y}{9} + \frac{2}{27} \right) e^{-3y} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{-2 + 5e^3}{9(e^3 - 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D^2(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \frac{-2 + 5e^3}{9(e^3 - 1)} - \frac{(1 + 2e^3)^2}{9(e^3 - 1)^2} = \frac{(-2 + 5e^3)(e^3 - 1) - (1 + 2e^3)^2}{9(e^3 - 1)^2} \end{aligned}$$

AUFGABE 3

a)

Es ist $\overline{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ und damit

$$\det \overline{\Sigma}_2 = \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \overline{\Sigma}^{-1} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Es folgt:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{3}{4}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x_1, x_2 - 1) \cdot \frac{4}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- b) Da $\vec{X}$ Normalverteilt ist, liegt Unabhängigkeit vor, falls X_1 und X_2 unkorreliert sind. X_1 und X_2 sind aber nicht unkorreliert, da $\rho \neq 0$ ist $\Rightarrow X_1$ und X_2 sind **nicht** unabhängig!

AUFGABE 4

a)

Verteilung für ein Auto: $\mathcal{N}_1(4,8\text{m}; (0,7\text{m})^2)$

Verteilung für fünf Autos: $\mathcal{N}_5(5 \cdot 4,8\text{m}; 5 \cdot (0,7\text{m})^2) = \mathcal{N}_5(24\text{m}; 2,45\text{m}^2)$

Wahrscheinlichkeit, dass 5 Autos $\leq 22\text{m}$ sind:

$$P_a = \Phi\left(\frac{22\text{m} - 24\text{m}}{\sqrt{2,45\text{m}^2}}\right) \approx \Phi(-1,2778) = 1 - \Phi(1,2778) \approx 1 - 0,8997 = 0,1003$$

- b) Länge des ersten Autos sei X , dann muss gelten:

$$\begin{aligned} P_b &= \Phi\left(\frac{22\text{m} - (X + 19,2\text{m})}{\sqrt{1,96\text{m}^2}}\right) = P_a \approx \Phi(-1,2778) \\ \Rightarrow \frac{22\text{m} - (X + 19,2\text{m})}{\sqrt{1,96\text{m}^2}} &= -1,2778 \\ \Rightarrow X &= 4,5885\text{m} \end{aligned}$$

- c) Länge des vom ersten Auto verbrauchten Platzes ist bekannt (4m); Länge der anderen vier Autos ist $\mathcal{N}_4(4 \cdot 4,8\text{m}; 4 \cdot (0,7\text{m})^2)$ verteilt.

$$\begin{aligned} P_c &= \Phi\left(\frac{22\text{m} - (4\text{m} + 19,2\text{m})}{\sqrt{1,96\text{m}^2}}\right) \approx \Phi(-0,8571) \\ &= 1 - \Phi(0,8571) = 1 - 0,8051 = 0,1949 \end{aligned}$$

AUFGABE 5

a)

$$E\{X\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \cos[\omega_c(2t + \tau) + 2\theta] d\theta$$

$$\text{Subst.: } \theta := \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 2\theta, \theta = \pi \Rightarrow \alpha = 2\pi, \theta = 3\pi \Rightarrow \alpha = 6\pi$$

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{6\pi} \cos[\omega_c(2t + \tau) + \alpha] \frac{d\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{4\pi} [\sin(\omega_c(2t + \tau) + \alpha)]_{\alpha=2\pi}^{\alpha=6\pi} = 0 \end{aligned}$$

da $\sin(x)$ mit 2π -periodisch ist.

b)

$$\begin{aligned} \varphi_{YY}(\tau) &= E\{Y(t + \tau)Y(t)\} \\ &= E\{[A(t + \tau) \cos(\omega_c(t + \tau) + 2\theta)] [A(t) \cos(\omega_c t + 2\theta)]\} \\ &= E\{A(t + \tau)A(t)\} \cdot E\{\cos(\omega_c(t + \tau) + 2\theta) \cdot \cos(\omega_c t + 2\theta)\} \\ &= \varphi_{AA}(\tau) E\left\{\frac{1}{2} \cos(\omega_c \tau) + \frac{1}{2} \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\theta)\right\} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_{AA}(\tau) \cos(\omega_c \tau) = \frac{1}{2} \varphi_{AA}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Phi_{YY}(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \varphi_{AA}(\tau) \cos(2\pi f_c \tau)\right\} \\ \Phi_{AA}(f) &= \mathcal{F}\{\varphi_{AA}(\tau)\} \\ \cos(2\pi f_c \tau) &\circ \bullet \frac{1}{2} (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)) \\ \Rightarrow \Phi_{YY}(f) &= \frac{1}{4} \Phi_{AA}(f - f_c) + \frac{1}{4} \Phi_{AA}(f + f_c) \end{aligned}$$

AUFGABE 6

a) Übergangsmatrix:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,9 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\vec{p}^T(2) = \vec{p}^T(0) \cdot \overline{P}^2 \text{ mit dem Startvektor } \vec{p}^T(0) = (a, 0, 0, 1 - a, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{p}^T(2) = (a, 0, 0, 1 - a, 0) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0 & 0,45 & 0,18 \\ 0,72 & 0,08 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}^T(2) = (0,72 - 0,72a; 0,08 + 0,22a; 0,4a; 0; 0,2 + 0,1a)$$

c)

$$\text{Zustand 2 und 5 sind Rand} \Rightarrow m_2 = 0; \quad m_5 = 0$$

$$m_1 = 1 + 0,3m_2 + 0,5m_4 + 0,2m_5 = 1 + 0,5m_4$$

$$m_3 = 1 + 0,9m_1 + 0,1m_2 = 1 + 0,9m_1$$

$$m_4 = 1 + 0,8m_3 + 0,2m_5 = 1 + 0,8m_3$$

$$m_1 = 1 + 0,5 + 0,4m_3 = 1,5 + 0,36m_1 + 0,4$$

$$\Rightarrow m_1 = 2,96875$$

$$m_3 = 1 + 0,9m_1 = 3,671875$$

$$m_4 = 1 + 0,8m_3 = 3,9375$$

Startzustand 1 tritt mit Ws. a und Zustand 4 mit Ws. $1 - a$ ein:

$$\Rightarrow m = a \cdot m_1 + (1 - a)m_4 = 3,9375 - 0,96875a$$

Die mittlere Dauer bis zur Absorption im Rand beträgt $3,9375 - 0,96875a$ Schritte.