

Aufgabe 1

Eine Urne enthält 100 Kugeln. 95 Kugeln sind schwarz, die restlichen 5 rot. Von den 100 Kugeln sind 96 mit einem A gekennzeichnet und die restlichen 4 mit einem B. Jede Kugel besitzt die gleiche Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden. Es soll die Wahrscheinlichkeit $P(A \wedge \text{schwarz})$ abgeschätzt werden, dass bei einem einzigen Zug eine schwarze Kugel, die mit einem A gekennzeichnet ist, aus der Urne genommen wird.

- Handelt es sich hier um ein Laplace-Experiment? Begründung!
- Zeigen Sie, dass man $P(A \wedge \text{schwarz}) \geq 0,91$ abschätzen kann.
- Schätzen Sie $P(A \wedge \text{schwarz})$ nach oben ab.

Aufgabe 2

Urne 0 enthält eine mit 1 und zwei mit 0 markierte Kugeln während sich in Urne 1 eine mit 0 und fünf mit 1 markierte Kugeln befinden. Es wird das folgende Zufallsexperiment betrachtet:

Schritt 1: Mit dem Wurf einer fairen Münze wird die Urne 0 ausgewählt, wenn Kopf fällt. Fällt Zahl wird die Urne 1 ausgewählt. Die Nummer der ausgewählten Urne wird aufgeschrieben.

Schritt 2: Der ausgewählten Urne wird zufällig eine Kugel entnommen und die darauf markierte Ziffer wird aufgeschrieben. Dann wird die Kugel in die Urne, der sie entnommen wurde, zurückgelegt. Für den nächsten Schritt wird gemäß der zuletzt aufgeschriebenen Ziffer eine der beiden Urnen ausgewählt usw.

- Skizzieren Sie das Zustandsdiagramm des Zufallsexperiments unter der Berücksichtigung der Übergangswahrscheinlichkeiten.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten vier Schritten folgende Ziffern aufgeschrieben werden:
- | | | | | |
|---------|---|---|---|---|
| Schritt | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Ziffer | 0 | 0 | 1 | 1 |

Aufgabe 3

Die stetige Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}$ besitze die Dichte $f_X(x)$.

- Geben Sie die Dichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariablen $Y = e^X$ an.
- Geben Sie die Dichte $f_Y(y)$ für den Spezialfall an, dass X eine $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ -Verteilung besitzt.
- Skizzieren Sie die Dichte $f_Y(y)$ aus b), wenn $\mu = 0$ und σ^2 gewählt wird im Intervall $0 < y \leq 5$.

Aufgabe 4

In einer Chipproduktion werden pro Tag auf 15000 Siliziumwafern jeweils 500 gleiche Schaltungen produziert. Eine Schaltung ist mit einer Wahrscheinlichkeit $P_D = 0,00062$ defekt. Um die Qualität zu testen wird auf allen Wafern eine Schaltung untersucht. Dabei kann jede Schaltung pro Wafer W_i gleichwahrscheinlich überprüft werden.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{TD} , dass die Qualitätskontrolle an einem Tag mehr als 10 defekte Schaltungen entdeckt? (Die Angabe der Formel, mit der diese Wahrscheinlichkeit berechnet wird, reicht aus!)
- Wie kann die Wahrscheinlichkeit approximativ berechnet werden? Begründung!
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{TD} approximativ.

Aufgabe 5

Die Zufallsvariable Y nehme die diskreten Werte $y_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an. Die Wahrscheinlichkeit $P(y_i)$, dass $Y = y_i$ ist, wird durch folgende Tabelle gegeben:

Y	1	2	3	4	5
$P(y_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

X sei eine kontinuierliche Zufallsvariable, die folgende Dichte besitzt:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot e^{-0,5 \cdot x} & \text{für } 0 < x \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

X und Y seien unabhängig.

- Geben Sie für Y die Dichte $f_Y(y)$ an.
- Berechnen Sie die Dichte $f_Z(z)$ der Zufallsvariable $Z = X^2 Y$.
- Verifizieren Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b), indem Sie zeigen, dass $f_Z(z)$ eine Dichte ist.

Aufgabe 6

Die Anzahl der wartenden Autos an einer roten Ampel kann durch einen stochastischen Prozess $Y(\xi, t)$ beschrieben werden. In der Zeit $nT_{rot} \leq t \leq (n+1)T_{rot}$ wartet die Anzahl $A(nT_{rot})$ an Autos. $A(nT_{rot})$ ist poissonverteilt mit $E\{A(nT_{rot})\} = 20 \text{ Autos}$. $Y(\xi, t)$ kann als Reihe dargestellt werden:

$$Y(\xi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(nT_{rot}) \cdot h(t - nT_{rot}) \cdot 4 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t\right) \right], \quad (1)$$

wobei $[x]$ der ganzzahlige Anteil von x bedeutet und

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

ist. Der Term $\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t\right) \right]$ berücksichtigt die periodischen Schwankungen in der Tageszeit.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E\{Y(\xi, t)\}$ und zeichnen Sie diesen in Abhängigkeit der Zeit im Intervall $0 \leq t \leq 8T_{rot}$.

Es sei $Z(\xi, t) = Y^2(\xi, t)$.

- b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\phi_{YZ}(t_1, t_2)$ für $t_1 = t_2$. (Hinweis: Verwenden Sie die charakteristische Funktion von $A(nT_{rot})$.)

Musterlösung zur Klausur

Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2003/2004

AUFGABE 1

- a) Laplace-Experiment

Begründung:

- endlicher Ereignisraum
- gleiche Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis, „Ziehen einer Kugel“

- b)

$$P(\text{schwarz}) = 0,95$$

$$P(A) = 0,96$$

$$P(A \wedge \text{schwarz}) = P(A) + P(\text{schwarz}) - P(A \vee \text{schwarz})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,04$$

$$P(\overline{\text{schwarz}}) = 1 - P(\text{schwarz}) = 0,05$$

$$P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}}) = P(\bar{A} \vee \overline{\text{schwarz}})$$

$$= P(\bar{A}) + P(\overline{\text{schwarz}}) - P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}})$$

$$P(\bar{A} \vee \overline{\text{schwarz}}) = 0,04 + 0,05 - \underbrace{P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}})}_{>0}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}}) \leq 0,09$$

$$\Rightarrow 1 - P(A \wedge \text{schwarz}) \leq 0,09$$

$$\Rightarrow 0,91 \leq P(A \wedge \text{schwarz})$$

- c) Anzahl von schwarzen Kugel mit A:

$$\text{„worst case“: } 91 \Rightarrow P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}}) = \frac{91}{100}$$

$$\text{„best case“: } 95 \Rightarrow P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}}) = \frac{95}{100}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \wedge \overline{\text{schwarz}}) \leq \frac{95}{100}$$

AUFGABE 2

a)

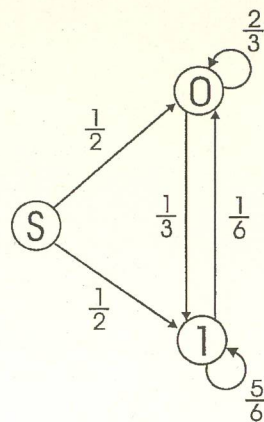


BILD 1. Zustandsdiagramm

b) Alle Schritte des Zufallsexperiments sind stochastisch unabhängig voneinander. Damit liest man aus dem Zustandsdiagramm a) sofort ab

$$P[0011] = P[1|1] \cdot P[1|0] \cdot P[0|0] \cdot P(0),$$

worin $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ die W-Verteilung des Münzwurfs ist:

$$P[0011] = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{54}$$

AUFGABE 3

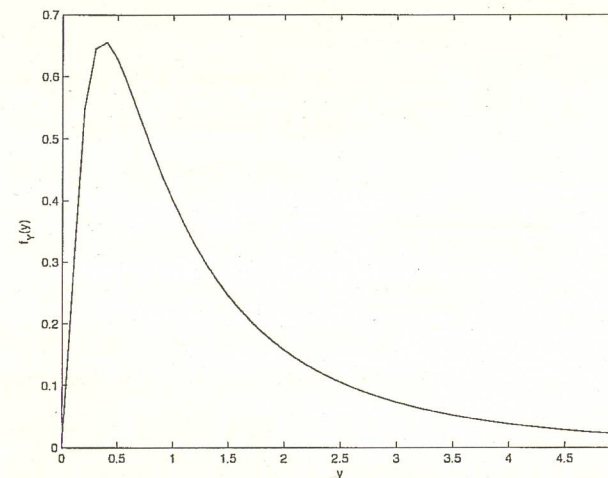
a) mit $x_1 = \ln(y)$ und Gleichung (4.2-9) folgt:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & : y \leq 0 \\ \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) & : y > 0 \end{cases}$$

b)

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

c)

BILD 2. Skizze $f_Y(y)$ über y

AUFGABE 4

a) Binomialverteilung

$$P(\text{defekt}) = P_D = 0,00062 = p$$

$$N = 15000$$

 X_N = Anzahl der defekten entdeckten Schaltungen pro Tag

$$\Rightarrow P(X_N = K) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$$

$$\Rightarrow P(X_N > 10) = \sum_{n=11}^{15000} \binom{15000}{n} 0,00062^n (1-0,00062)^{15000-n}$$

b) Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Summe von binomialverteilten Zufallsvariablen $\Rightarrow$ Satz von de Moivre - Laplace. Überprüfung der Faustregel $D^2 \geq 9$:

$$D^2(X_n) = Np(1-p) = 9,29.$$

Regel ist erfüllt.

c)

$$P(X_N) = P\left(\frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} > \frac{10 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$$

$$= P\left(\frac{X_N - 9,3}{9,294} > 0,23\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X_N - 9,3}{9,294} \leq 0,23\right) \approx 1 - \Phi(0,23) = 0,409 = P_{TD}$$

AUFGABE 5

a) $f_Y(y) = 0,2\delta(y-1) + 0,3\delta(y-2) + 0,1\delta(y-3) + 0,2\delta(y-4) + 0,2\delta(y-5)$

b)

$$Z = X^2 Y$$

Dichtetrafo $u_1 = z, u_2 = y \Rightarrow x = \sqrt{\frac{u_1}{u_2}}$

$$\Rightarrow \text{Jakobideterminante } J = \frac{1}{2\sqrt{u_1 u_2}}$$

$$\Rightarrow h_{ZY}(z, y) = \frac{1}{2\sqrt{yz}} f_{XY}\left(\sqrt{\frac{z}{y}}, y\right)$$

weil X und Y unabhängig

$$\Rightarrow h_{ZY}(z, y) = \frac{1}{2\sqrt{yz}} f_X\left(\sqrt{\frac{z}{y}}\right) \cdot f_Y(y)$$

$$\Rightarrow h_{ZY}(z, y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\sqrt{\frac{z}{y}}} \sum_i P_{y_i} \delta(y - y_i) \frac{1}{2\sqrt{yz}} & : z > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

- Fall 1: $z > 0$

$$f_Z(z) = \int h(z, y) dy = \sum_i \lambda e^{-\lambda\sqrt{\frac{z}{y_i}}} P_{y_i} \frac{1}{2\sqrt{y_i z}}$$

mit $\sqrt{\frac{\lambda^2}{y_i}} = \lambda_i$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \int h(z, y) dy = \sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i \sqrt{z}} P_{y_i} \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

- Fall 2: $z \leq 0$

$$f_Z(z) = 0$$

c) 1. Bedingung:

$$\begin{aligned}
 F_Z(\infty) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{+\epsilon}^{\infty} \sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i \sqrt{z}} P_{y_i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz \\
 &= \sum_i P_{y_i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{+\epsilon}^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i u} du \\
 &= \sum_i P_{y_i} \underbrace{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{+\epsilon}^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i u} du}_{=1} = \sum_i P_{y_i} = 1
 \end{aligned}$$

2. Bedingung: $f_Z(z) \geq 0$ für $\forall z$ ist erfüllt, da $f_Z(z)$ sich nur aus nicht negativen Summanden zusammensetzt.

AUFGABE 6

a)

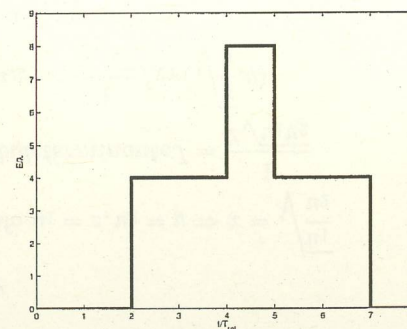
$$\begin{aligned}
 E\{Y(\xi, t)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{A(nT_{rot})\} \cdot h(t - nT_{rot}) \cdot 4 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t\right) \right] \\
 E\{Y(\xi, t)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda \cdot h(t - nT_{rot}) \cdot 4 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$E\{Y(0)\} = 0 \quad E\{Y(4T_{rot})\} = 8\lambda$$

$$E\{Y(1T_{rot})\} = 0 \quad E\{Y(5T_{rot})\} = 4\lambda$$

$$E\{Y(2T_{rot})\} = 4\lambda \quad E\{Y(6T_{rot})\} = 4\lambda$$

$$E\{Y(3T_{rot})\} = 4\lambda \quad E\{Y(7T_{rot})\} = 0$$

BILD 3. Skizze $f_Y(y)$ über y

b)

$$\phi_{YZ}(t_1, t_1) = E\{Y_{t_1}^3\}$$

$$= E\{A^3(nT_{rot})\}4^3 \left(\left| 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t_1\right) \right| \right)^3, nT \leq t_1 \leq (n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$

mit der charakt. Fkt. $\Phi_{A(nT_{rot})}(s) = e^{\lambda(e^{js}-1)}$

$$\Rightarrow E\{A^3(nT_{rot})\} = \frac{\Phi^{(3)}(s)}{j^3} = \lambda + 4\lambda^2 \text{ für } s = 0$$

$$\Rightarrow E\{Y_{t_1}^3\} = (\lambda + 4\lambda^2)4^3 \left(\left| 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8T_{rot}}t_1\right) \right| \right)^3, nT \leq t_1 \leq (n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$