

Ein Hersteller von Taschenrechnern kauft seine Prozessoren bei drei verschiedenen Lieferanten L_1, L_2, L_3 . Aus Erfahrung weiß er, dass 1% der von L_1 , 4% der von L_2 und 2% der von L_3 gelieferten Prozessoren defekt sind. Der Hersteller kauft 30% der Prozessoren bei L_1 , 30% bei L_2 und den Rest bei L_3 .

Vor dem Einbau in einen Taschenrechner wird ein beliebig ausgewählter Prozessor getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser Prozessor defekt?

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X habe den Erwartungswert $\mu = E\{X\}$ und die Varianz $\sigma^2 = D^2\{X\}$. X wird unabhängig voneinander N -mal beobachtet und aus diesen Beobachtungen werden der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$ und die empirische Varianz $S^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \right)^2 - \bar{X}^2$ geschätzt. Dabei haben die X_n dieselbe Verteilung wie X .

Zeigen Sie:

- $E\{\bar{X}\} = \mu$
- $E\{S^2\} \neq \sigma^2$

Aufgabe 3

Gegeben seien die beiden unabhängigen $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen X und Y . Diese werden durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \cos 2\Phi \\ R^2 \sin 2\Phi \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq R$ und $0 \leq \Phi < \pi$ auf die Zufallsvariablen R und Φ abgebildet.

- Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen R .
- Berechnen Sie $E\left\{\frac{1}{R^2}\right\}$.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine Reihenschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2 . Aufgrund von Fertigungstoleranzen seien die Widerstände unabhängig normalverteilt. Der Widerstand R_1 habe den Erwartungswert $\mu_1 = 400\Omega$ und die Standardabweichung $\sigma_1 = 8\Omega$, wohingegen $R_2 \sim N(500\Omega, 80\Omega^2)$ -verteilt sei.

Die Reihenschaltung werde von einer konstanten Stromquelle mit 5A gespeist.

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtwiderstandes.
- Berechnen Sie die Varianz der Spannung U_{ges} über der Reihenschaltung.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Spannung um 5% von der erwarteten Spannung ab?

2

Aufgabe 5

In einer Arztpraxis gibt es folgende Vorschrift, wenn zwei Patienten gleichzeitig die Praxis betreten und sich anmelden möchten:

- Jeder der beiden Patienten greift in eine Urne mit jeweils drei Kugeln. Eine Kugel in der jeweiligen Urne ist mit einer 0, die andere mit einer 1 und die letzte mit einer 2 gekennzeichnet.
 - Zieht ein Patient eine 0, darf dieser gleich zur Rezeption, um sich anzumelden. Bei einer 1 muß er eine Minute und bei einer 2, zwei Minuten warten.
 - Kommen beide gleichzeitig zur Rezeption müssen beide nochmals ziehen.
 - Kommt nur einer der beiden zur Rezeption, darf dieser sofort in die Sprechstunde.
- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.
 - Wie groß ist die mittlere Wartezeit bis nur einer der beiden Patienten zur Rezeption kommt?

Aufgabe 6

Eine Spannung v mit konstantem, aber unbekanntem, Wert soll durch Messungen bestimmt werden. Jeder einzelne Messwert X_n ist die Summe der gesuchten Spannung v und einer Rauschspannung, die durch eine Zufallsvariable N_n mit dem Erwartungswert $\mu = 0$ und der Varianz $\sigma = 1$ Volt beschrieben wird:

$$X_n = v + N_n$$

Wir nehmen an, dass die Messwerte X_n unabhängige Zufallsvariablen sind.

Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung an, wie viele Messungen nötig sind, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mittelwert der Messwerte

$$M_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

sich vom wahren Wert v um weniger als $\epsilon = 1$ Volt unterscheidet, mindestens 0,99 ist!

3

Aufgabe 1

B sei das Ereignis, dass der Prozessor defekt ist.

^A WT · F 2006 sei das Ereignis, dass der Prozessor von L_i geliefert wurde: $P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,3$; $P(A_3) = 0,4$

Darüber hinaus ist bekannt: $P(B|A_1) = 0,01$; $P(B|A_2) = 0,04$; $P(B|A_3) = 0,02$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeiten folgt: $P(B) = 0,023$

Aufgabe 2

$$a) E\{\bar{X}\} = \frac{1}{N} \sum E\{X_n\} = \frac{N\mu}{N} = \mu$$

$$b) E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right)^2 - \bar{X}^2\right\} = E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right)^2\right\} - E\{\bar{X}^2\} = 0$$

Aufgabe 3

$$a) f_R(r) = 2e^{-\left(\frac{r^4}{2}\right)} R^3$$

$$b) \int_0^\infty e^{u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Aufgabe 4

$$a) \mu = 900\Omega, \sigma_{ges}^2 = 144\Omega^2$$

$$b) \sigma_U^2 = 3600V^2$$

$$c) P = 2\Phi(3,75) - 1 = 0,999823$$

Aufgabe 5

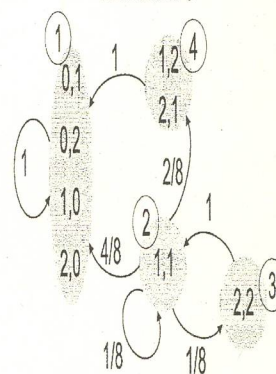


BILD 1. zu Aufgabe 5a

1

a)

$$(1) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/8 & 1/8 & 1/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Berechnung der mittleren Dauer $\bar{t}$: $\bar{t} = \frac{5}{6} \text{ min}$

Aufgabe 6

mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung folgt: $N \geq 100$