

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) In einer Fabrik befinden sich drei unabhängig voneinander arbeitende Maschinen. Es sei A_k das Ereignis, dass die k -te Maschine ausfällt, und $p_k := P(A_k)$ sei die zugehörige Wahrscheinlichkeit ($k = 1, 2, 3$). Dabei gelte: $p_1 = p_2 = \frac{1}{10}$, $p_3 = \frac{1}{5}$. B bezeichne das Ereignis {Mindestens eine Maschine fällt aus}.
- Berechnen Sie $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ und $P(A_1 \cup A_2)$.
 - Stellen Sie B mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 dar, und berechnen Sie $P(B)$.
 - Mindestens eine Maschine sei ausgefallen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Maschine ausgefallen ist.
 - Sind A_1 und B unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Eine Urne enthält drei rote und sechs schwarze Kugeln. Rein zufällig wird eine Kugel aus der Urne gezogen. Diese Kugel sowie eine zusätzliche (d.h. zehnte) Kugel derselben Farbe werden in die Urne zurückgelegt. Nach gutem Mischen wird der Urne abermals eine Kugel entnommen. Diese sei rot.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste gezogene Kugel ebenfalls rot?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein unfairer Würfel wird einmal geworfen. Bezeichnet die Zufallsvariable X_1 die erzielte Augenzahl, so habe X_1 die folgende Verteilung

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	p	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

- Bestimmen Sie p .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1 .
- Geben Sie alle Zahlen $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ an, für die sowohl $P(X_1 < k) \leq \frac{1}{2}$ als auch $P(X_1 > k) \leq \frac{1}{2}$ erfüllt sind.
- Der unfaire Würfel wird nun N -mal in unabhängiger Folge geworfen, wobei $N \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable X_j bezeichne die im j -ten Wurf erzielte Augenzahl ($j = 1, \dots, N$). Bestimmen Sie
 - $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{j=1}^N X_j \leq 3N - \sqrt{3N}\right)$;
 - $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{j=1}^N X_j \geq \frac{7}{2}N\right)$.

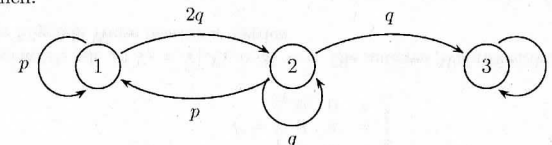
Hinweis: Für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt:

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.6915, \quad \Phi(1) \approx 0.8413, \quad \Phi(2) \approx 0.9772, \quad \Phi\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0.9938.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Die homogene Markoffkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf der Zustandsmenge $\{1, 2, 3\}$ besitze den Übergangsgraphen:



Hierbei sind $p, q \in (0, 1)$ fest vorgegebene Zahlen, die $p + 2q = 1$ erfüllen.

- Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix P an.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p und q die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2);$$

$$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 2);$$

$$P(X_2 = 3 \mid X_0 = 2);$$

$$P(X_3 = 2 \mid X_1 = 3).$$
- Nun seien $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{4}$. Ferner sei der Anfangszustand der Markoffkette 1. Berechnen Sie die mittlere Dauer bis zur Absorption in Zustand 3.

- b) Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment:

Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ wird ein ideales Tetraeder geworfen, dessen vier Seitenflächen mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 beschriftet sind. Als Ergebnis eines Wurfes gilt die Ziffer der Seitenfläche, auf der das Tetraeder liegen bleibt. Die Zufallsvariable Y_n beschreibe die höchste Augenzahl, die bis zum Zeitpunkt n (einschließlich) erzielt wurde. Dann ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markoffkette. (Dies muss nicht begründet werden!)

Geben Sie eine geeignete Zustandsmenge, den Anfangszustand sowie die Übergangsmatrix der Markoffkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe mit einem geeigneten $b > 1$ die Dichte

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(u+1) & \text{für } u \in [-1, 0] \\ \frac{1}{u^2} & \text{für } u \in [1, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

- Bestimmen Sie b .
- Geben Sie die Verteilungsfunktion F_X von X an.
- Berechnen Sie
 - $P(-\frac{1}{2} < X < 2)$;
 - $P(0 \leq X \leq 1)$;
 - $P(-2 \leq X \leq 5)$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $D^2(X)$ von X .
- Es sei Y eine weitere Zufallsvariable mit obiger Dichte f , und Y sei unabhängig von X . Bestimmen Sie
 - $E(\frac{1}{2}(X + \frac{1}{12})Y)$;
 - $D^2(\frac{1}{2}X - Y + 1)$.

Viel Erfolg!

Wahrscheinlichkeitstheorie
für die Fachrichtung Elektroingenieurwesen
Diplom-Vorprüfung bzw. Bachelor-Modulprüfung

Lösungsvorschläge

Lösung 1

- a) i) Aufgrund der Unabhängigkeit von
- A_1, A_2, A_3
- gilt

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p_1 p_2 p_3 = \frac{1}{500}$$

sowie

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = \frac{19}{100}.$$

- ii) Es ist
- $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- . Verwendet man an der mit (+) gekennzeichneten Stelle die Unabhängigkeit von
- A_1, A_2, A_3
- , so erhält man

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= \frac{19}{100} + P(A_3) - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ &\stackrel{+}{=} \frac{19}{100} + p_3 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3 = \frac{19}{100} + \frac{1}{5} - \frac{2}{50} + \frac{1}{500} \\ &= \frac{95 + 100 - 20 + 1}{500} = \frac{176}{500} = \frac{44}{125}. \end{aligned}$$

- iii) Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{125}{44} = \frac{25}{88}.$$

- iv) Wegen
- $P(A_1 | B) = \frac{25}{88} \neq \frac{1}{10} = P(A_1)$
- sind die Ereignisse
- A_1
- und
- B
- nicht unabhängig.

- b) Sind die Ereignisse
- R_1, R_2
- gemäß

$$R_1 := \{\text{Die erste gezogene Kugel ist rot}\},$$

$$R_2 := \{\text{Die zweite gezogene Kugel ist rot}\}$$

definiert, dann ergeben sich die folgenden Werte unmittelbar aus der Aufgabenstellung

$$P(R_1) = \frac{1}{3}, \quad P(\overline{R_1}) = \frac{2}{3}, \quad P(R_2 | R_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(R_2 | \overline{R_1}) = \frac{3}{10}.$$

Mit Hilfe der Formel von Bayes erhält man für die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist, wenn die zweite gezogene Kugel rot ist:

$$\begin{aligned} P(R_1 | R_2) &= \frac{P(R_2 | R_1) P(R_1)}{P(R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_2 | \overline{R_1}) P(\overline{R_1})} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

- a) Es ist

$$p = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 \geq 2) = 1 - \frac{14}{20} = \frac{3}{10}.$$

- b) Der Erwartungswert von
- X_1
- beträgt

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^6 k P(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{3}{20} + 6 \cdot \frac{2}{20} \\ &= \frac{6 + 6 + 9 + 12 + 15 + 12}{20} = \frac{60}{20} = 3. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= \sum_{k=1}^6 k^2 P(X_1 = k) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 9 \cdot \frac{3}{20} + 16 \cdot \frac{3}{20} + 25 \cdot \frac{3}{20} + 36 \cdot \frac{2}{20} \\ &= \frac{6 + 12 + 27 + 48 + 75 + 72}{20} = \frac{240}{20} = 12 \end{aligned}$$

ergibt sich für die Varianz von X_1

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 3.$$

- c) Einzig für
- $k = 3$
- sind sowohl
- $P(X_1 < k) \leq \frac{1}{2}$
- als auch
- $P(X_1 > k) \leq \frac{1}{2}$
- erfüllt.

- d) i) Die Zufallsvariablen
- $X_1, X_2, \dots, X_N$
- sind unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund von
- $E(X_1) = 3$
- ,
- $D^2(X_1) = 3$
- folgt mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{j=1}^N X_j \leq 3N - \sqrt{3N}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{j=1}^N X_j - 3N}{\sqrt{3N}} \leq -1\right) \\ &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587. \end{aligned}$$

- ii) Das Chintschinsche Gesetz der großen Zahlen liefert

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left(\sum_{j=1}^N X_j \geq \frac{7}{2}N\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^N X_j < \frac{7}{2}N\right) = 1 - P\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j - 3 < \frac{1}{2}\right) \\ &\leq 1 - P\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j - 3\right| < \frac{1}{2}\right) \rightarrow 1 - 1 = 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Demnach ist $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sum_{j=1}^N X_j \geq \frac{7}{2}N) = 0$.

Lösung 3

- a) i) Die zugehörige Übergangsmatrix
- P
- lautet

$$P = \begin{pmatrix} p & 2q & 0 \\ p & q & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ii) Offensichtlich gilt
- $P(X_3 = 2 | X_1 = 3) = 0$
- . Die anderen Wahrscheinlichkeiten können auf die folgende Weise bestimmt werden

$$\begin{aligned} (P(X_2 = 1 | X_0 = 2), P(X_2 = 2 | X_0 = 2), P(X_2 = 3 | X_0 = 2)) &= (0, 1, 0) P^2 \\ &= (0, 1, 0) \begin{pmatrix} p^2 + 2pq & 2pq + 2q^2 & 2q^2 \\ p^2 + pq & 2pq + q^2 & q^2 + q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (p^2 + pq, 2pq + q^2, q^2 + q). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_2 = 1 | X_0 = 2) &= p^2 + pq, \\P(X_2 = 2 | X_0 = 2) &= 2pq + q^2, \\P(X_2 = 3 | X_0 = 2) &= q^2 + q.\end{aligned}$$

iii) Sind speziell $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$ gewählt, so hat die Übergangsmatrix die Gestalt

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne m_i die mittlere Dauer, um von dem Zustand i aus bis zur Absorption im Rand $R = \{3\}$ zu gelangen ($i = 1, 2, 3$). Für jeden inneren Zustand $i = 1, 2$ gilt dann

$$m_i = 1 + \sum_{j=1}^3 p_{ij} m_j,$$

wobei $p_{ij} := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ die Übergangswahrscheinlichkeit bezeichnet. In der vorliegenden Situation gilt

$$\begin{aligned}m_3 &= 0 \\m_1 &= 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 \iff \frac{1}{2}m_1 = 1 + \frac{1}{2}m_2 \quad (1)\end{aligned}$$

$$m_2 = 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{4}m_2. \quad (2)$$

Da der Anfangszustand 1 ist, muss m_1 bestimmt werden.

Setzt man (1) in (2) ein, so erhält man

$$m_2 = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}m_2\right) + \frac{1}{4}m_2 \iff \frac{1}{4}m_2 = 2 \iff m_2 = 8.$$

(1) liefert hiermit

$$\frac{1}{2}m_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 = 5 \iff m_1 = 10.$$

Die mittlere Absorptionsdauer beträgt also 10 Zeitschritte.

b) Als Zustandsmenge kann man $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ wählen. Solange das Tetraeder noch nicht geworfen wurde, befinde sich das System im Zustand 0. Der Anfangszustand sei also 0.

Verwendet man die naheliegende Zuordnung

höchste Augenzahl	1	2	3	4
Zustand	1	2	3	4

so ergibt sich die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

a) Da f eine Dichte ist, gilt

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(u+1) du + \int_1^b \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}u^2 + u \right) \Big|_{u=-1}^0 - \frac{1}{u} \Big|_{u=1}^b \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{b} - 1 \right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{b}\end{aligned}$$

bzw.

$$b = 4.$$

b) Die Verteilungsfunktion F_X von X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ \int_{-1}^x \frac{1}{2}(u+1) du = \frac{1}{4}(x+1)^2 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} + \int_1^x \frac{1}{u^2} du = \frac{5}{4} - \frac{1}{x} & \text{für } 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 4 \\ & \text{für } x \geq 4 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

c) Da X eine stetige Zufallsvariable ist, gilt

$$\begin{aligned}P\left(-\frac{1}{2} < X < 2\right) &= F_X(2) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}, \\P(0 \leq X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(0) = 0, \\P(-2 \leq X \leq 5) &= F_X(5) - F_X(-2) = 1.\end{aligned}$$

d) Für den Erwartungswert von X ergibt sich

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(u^2 + u) du + \int_1^4 \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2 \right) \Big|_{u=-1}^0 + \ln(u) \Big|_{u=1}^4 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \ln(4) = \ln(4) - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(u^3 + u^2) du + \int_1^4 1 du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{3}u^3 \right) \Big|_{u=-1}^0 + 3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) + 3 = \frac{1}{24} + 3 = \frac{73}{24}\end{aligned}$$

folgt für die Varianz von X

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{73}{24} - \left(\ln(4) - \frac{1}{12} \right)^2.$$

e) Da X und Y die selbe Dichte besitzen, gilt $E(X) = E(Y)$ sowie $D^2(X) = D^2(Y)$. Ferner sind X und Y als unabhängig vorausgesetzt; hiermit sind dann auch $\frac{1}{2}(X + \frac{1}{12})$ und Y (dies wird in (*) benutzt) bzw. $\frac{1}{2}X$ und $-Y$ (dies geht in (**) ein) unabhängig. Die Rechenregeln für Erwartungswert bzw. Varianz liefern

$$\text{i) } E\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{12}\right)Y\right) \stackrel{(*)}{=} E\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{12}\right)\right)E(Y) = \frac{1}{2}\left(E(X) + \frac{1}{12}\right)E(Y)$$

$$\stackrel{E(X)=E(Y)}{=} \frac{1}{2} \ln(4) \left(\ln(4) - \frac{1}{12} \right) = \ln(2) \left(\ln(4) - \frac{1}{12} \right);$$

$$\text{ii) } D^2\left(\frac{1}{2}X - Y + 1\right) = D^2\left(\frac{1}{2}X + (-Y)\right) \stackrel{(**)}{=} D^2\left(\frac{1}{2}X\right) + D^2(-Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y)$$

$$\stackrel{D^2(X)=D^2(Y)}{=} \frac{5}{4} D^2(X) = \frac{5}{4} \left(\frac{73}{24} - \left(\ln(4) - \frac{1}{12} \right)^2 \right).$$