

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine Familie mit n Kindern. Wir interessieren uns für das Geschlecht der einzelnen Kinder. Es wird angenommen, dass jedes Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ ein Junge bzw. Mädchen ist, und dass das Geschlecht von verschiedenen Kindern sich unabhängig voneinander festlegt.
- (i) Wir nehmen $n = 3$ an. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an, mit dem man die Ereignisse $M_i = \{\text{das } i\text{-te Kind ist ein Mädchen}\}$, $i = 1, 2, 3$ modellieren kann.
- (ii) Es seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $A = \{\text{die Familie hat Kinder beiderlei Geschlechts}\}$ und $B = \{\text{die Familie hat höchstens ein Mädchen}\}$. Geben Sie die Elemente von A und B für Ihre Wahl von Ω an.
- (iii) Sind A und B stochastisch unabhängig?
- (iv) Es sei nun $n \geq 2$ beliebig. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit für $\{\text{das älteste Kind ist ein Mädchen}\}$ unter der Bedingung $\{\text{die Familie hat genau zwei Mädchen}\}$.
- b) Gegeben seien drei Teilmengen A, B, C eines Ergebnisraumes Ω . Es gelte $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Ergänzen Sie folgende Tabelle (auf Ihrem Bearbeitungsblatt) so, dass gilt: A und B sind unabhängig, A und C sind unabhängig, aber A und $B \cup C$ sind nicht unabhängig.

Menge M	$P(M)$
$A \cap B \cap C$	$\frac{1}{8}$
$A \cap B \cap \bar{C}$	
$A \cap \bar{B} \cap C$	
$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	
$\bar{A} \cap B \cap C$	
$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$	
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$	
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	

Aufgabe 2 (10 Punkte)

- a) In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, die mit 1, 2, 3, 4 und 5 nummeriert sind. Es wird n mal zufällig eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Y_k bezeichne die gezogene Nummer in der k . Ziehung.

Bestimmen Sie eine reelle Zahl a so, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{k=1}^n (Y_k - a) \geq 0\right) = \frac{1}{2}.$$

- b) Es wird folgendes Glücksspiel durchgeführt: Der Spieler wirft einen fairen Würfel. Zeigt er 6, so verliert der Spieler einen Euro. Zeigt er eine Zahl von 1 bis 5, so gewinnt der Spieler soviel Euro, wie der Würfel Augen zeigt. Die Zufallsvariable X_1 bezeichne den Gewinn des Spielers in Euro, wobei negative Werte Verlust bedeuten. Bestimmen Sie $E(X_1)$.
- c) Nun wird das Spiel erweitert: Der Spieler darf n mal würfeln. Tritt eine 6 auf, so verliert er einen Euro. Ansonsten gewinnt er die Summe der Augen der n Würfe in Euro. X_n bezeichne den Gewinn/Verlust des Spielers in Euro. Geben Sie die Verteilung von X_2 an.
- d) Bestimmen Sie $E(X_n)$.

Hinweis: Sie dürfen den folgenden Sachverhalt verwenden:

$$E(X_n) = P(\text{Bei den } n \text{ Würfeln tritt eine 6 auf}) \cdot (-1) + P(\text{Es tritt keine 6 auf}) \cdot \left(\sum_{k=1}^n E(Y_k)\right),$$

mit Y_k aus Teilaufgabe a).

WT - F 2009

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Übergangsmatrix P einer homogenen Markov-Kette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ ist durch

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen von X und geben Sie den Rand R von X an. Ist die Markov-Kette X absorbierend?
- Wenn die Anfangsverteilung (zum Zeitpunkt $n = 0$) $\vec{p}(0) = (0, 1, 0, 0)$ ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt 2 X im Zustand 1 ist?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit geht das System aus Zustand 1 in Zustand 4 in 2 Schritten über?
- Wie groß ist die mittlere Dauer m_2 aus Zustand 2 absorbiert zu werden?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

- Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = ce^{-|x|}$$

mit einem Parameter $c > 0$.

- Bestimmen Sie den Parameter c .
 - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 1)$.
- Die stetige Zufallsvariable Y habe die Dichte $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y .
- Es sei Z eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 2$. Die Zufallsvariablen Y und Z seien unabhängig. Bestimmen Sie $E(2Y^2 - Z + 5)$ und $E((Y - 1)(Z + 5))$.

Musterlösung

Aufgabe 12:

- i) Ein mögliches Ω ist

$$\Omega = \{0, 1\}^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{0, 1\}\},$$

Wobei $M_i = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_i = 1\}$ die Teilmenge, das i -te Kind ist ein Mädchen, darstellt.

$$ii) A = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$$

$$B = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

WT - F 2009

$$iii) P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{8} \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{4}{8}$$

$\Rightarrow A$ und B sind unabhängig.

$$(iv) P(\text{ältestes K. ist M.} | \text{Familie hat genau 2 M.})$$

$$= \frac{P(\text{ältestes K. ist M. und genau 2 M.})}{P(\text{genau 2 M.})}$$

$$= \frac{P(\text{ältestes K. ist M. und unter den } n-1 \text{ anderen K. ist 1 M.})}{P(\text{genau 2 M.})}$$

$$= \frac{P(\text{ältestes K. ist M.}) \cdot P(\text{unter den } n-1 \text{ anderen K. ist genau 1 M.})}{P(\text{genau 2 M.})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{n-1}{1} 2^{n-1-1}}{2^{n-1}}}{\frac{\binom{n}{2}}{2^n}} = \frac{(n-1) 2^{n-2}}{2 \cdot 2^{n-1} \cdot \frac{\binom{n}{2}}{2^n}} = \frac{(n-1)}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-1)}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n}$$

M	$P(M)$
$A \cap B \cap C$	$\frac{1}{8}$
$A \cap B \cap \bar{C}$	$p_1 = \frac{1}{8}$
$A \cap \bar{B} \cap C$	$p_2 = \frac{1}{8}$
$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	$p_3 = \frac{1}{8}$
$\bar{A} \cap B \cap C$	$p_4 \in [0, \frac{1}{4}] \setminus \{\frac{1}{8}\}$
$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$	$p_5 = \frac{1}{4} - p_4$
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$	$p_6 = \frac{1}{4} - p_4$
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$	$p_7 = p_4$

$$P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

ebenso:

$$p_2 = P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_3 &= P(A) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap \bar{C}) - P(A \cap \bar{B} \cap C) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - p_1 - p_2 \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B \cup C) &= P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &= P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) - P(\bar{A} \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - p_4 \\ &= \frac{7}{8} - p_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P(A \cap B) \cup P(A \cap C) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$P(A) \cdot P(B \cap C) \neq P(A \cap (B \cup C))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{8} - p_4\right) \neq \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{8} - p_4 \neq \frac{6}{8} \Leftrightarrow p_4 \neq \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} p_4 + p_5 &= P(\bar{A} \cap B) = P(B \setminus (B \cap A)) = P(B) - P(B \cap A) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Densso:

$$p_4 + p_6 = P(\bar{A} \cap C) = \frac{1}{4}$$

$$p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Es gilt $p_4 \geq 0$.Da auch $p_5 \geq 0$, folgt aus (I): $p_4 \leq \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow p_4 \in \left\{0, \frac{1}{4}\right\} \setminus \left\{\frac{1}{8}\right\}$$

Aus (I), (II), (III) ergeben sich noch p_5, p_6, p_7 .Aufgabe 2

$$\begin{aligned} b) E(X_1) &= P(X_1 = -1) \cdot (-1) + \sum_{k=1}^5 P(X_1 = k) \cdot k \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{15}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

k	-1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X_2 = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

a) Es sei $a := EY_1$. Da $Y_1, \dots, Y_n$ stochastisch unabhängig sind, die selbe Verteilung besitzen und $\text{Var}(Y_1) < \infty$ gilt, liefert der zentrale Grenzwertsatz:

$$P\left(\sum_{k=1}^n (Y_k - EY_1) \geq 0\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - EY_1)}{\sqrt{n \text{Var}(Y_1)}} \geq 0\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \Phi(0) = \Phi(-0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Also } a = EY_1 = 3.$$

$$\begin{aligned} d) E(X_n) &= (-1) \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot 3 \cdot n \\ &= (3n+1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

(I,

(II)

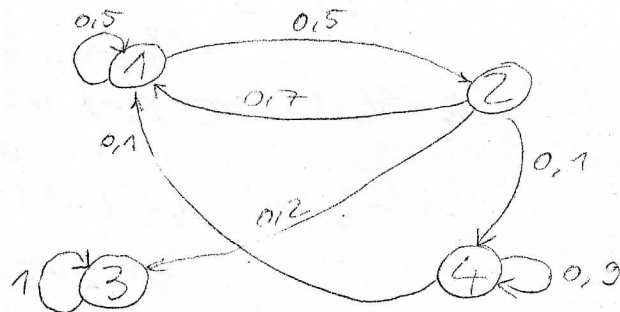
(III)

c) alternativ als konkret gemittelt: (Aufgabenstellung)

	-2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{36}$	1	2	2	3	4	5	4	5	4	3	2	1

Aufgabe 3

a) $R = \{3\}$

 X ist absorbierend.

b) Es gilt

$$\vec{p}(2) = \vec{p}(0) \cdot P^2 = (0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,25 & 0,1 & 0,05 \\ 0,36 & 0,35 & 0,2 & 0,09 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,14 & 0,05 & 0 & 0,81 \end{pmatrix}$$

$$= (0,36 \quad 0,35 \quad 0,2 \quad 0,09).$$

$$\Rightarrow P(X_2=1) = p_1(2) = 0,36.$$

$$c) P(X_{n+2}=4 | X_n=1) = (P^2)_{1,4} = 0,05.$$

d) Es gilt laut Vorlesung für die Absorptionssauern das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} m_1 = 1 + 0,5 m_1 + 0,5 m_2 \\ m_2 = 1 + 0,7 m_1 + 0,1 m_4 \\ m_4 = 1 + 0,1 m_1 + 0,9 m_4 \end{cases}$$

Dessen (eindeutige) Lösung ist
 $m_1 = 20, m_2 = 18, m_4 = 30.$ Aufgabe 4:

a) (i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2 [-e^{-x}]_0^{\infty} = 2.$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

(ii) $F(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t e^{-|x|} dx$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t e^{+x} dx = \frac{1}{2} e^t & ; t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [-e^{-x}]_0^t \\ = 1 - \frac{1}{2} e^{-t} : t \geq 0 \end{cases}$$

$$(iii) P(|X| \leq 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-|x|} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

b) (i) $EY = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \left[\frac{3}{8} x^4 \right]_{-1}^1 = 0.$

$$E(Y^2) = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x^4 dx = \left[\frac{3}{10} x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{3}{5}.$$

$$(ii) E(2Y^2 - Z + 5) = 2 \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{57}{10}.$$

$$E((Y-1)(Z+5)) = E(Y-1) \cdot E(Z+5) = (-1) \cdot (E(Z) + 5) = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2} + 5\right) = -\frac{11}{2}.$$