

WT - F 2011

Aufgabe 1

Max und Moritz würfeln. Der höhere Wurf bringt jeweils einen Punkt. Wer zuerst fünf Punkte hat, erhält den Einsatz von 10 €. Die Spieler vereinbaren, dass bei vorzeitigem Abbruch des Spiels der Einsatz gemäß der Gewinnchance, die jeder zum Zeitpunkt des Abbruchs hat, aufgeteilt wird. Das Spiel wird beim Stand von vier zu drei Punkten für Max abgebrochen. Welcher Betrag steht Max zu?

Bemerkung: Bei unentschieden ausgehenden Würfeln erhält keiner der Spieler einen Punkt.

Aufgabe 2

Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1; X_2)^T$ habe die Dichte

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \alpha \beta e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)} & \text{für } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sind X_1 und X_2 abhängig?
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\vec{X}$.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen von X_1 und X_2 .

Gegeben seien die Ereignisse $A = \{X_1 \leq 1; X_2 \leq 1\}$ und $B = \{X_1 > x_1; X_2 > x_2\}$ mit $x_1 > 0$ und $x_2 > 0$.

- Berechnen Sie $P(A)$.
- Berechnen Sie $P(B)$.

Aufgabe 3

Dem Trainer einer Handballmannschaft stehen 13 Feldspieler zur Verfügung.

- Wieviele Möglichkeiten hat der Trainer, sechs Feldspieler auf das Spielfeld zu stellen?

Ein Handballspieler aus der Mannschaft hat bei Heimspielen eine Trefferwahrscheinlichkeit beim Siebenmeterwurf von 95 %, bei Auswärtsspielen hingegen nur von 75 %. Die Hälfte der Spiele einer Saison sind Heimspiele.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem Spiel um ein Auswärtsspiel handelt, wenn man beobachtet, dass der Spieler bei einem Siebenmeterwurf nicht trifft?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler bei einem Heimspiel bei elf Siebenmeterwürfen elf mal trifft? Wie hoch ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit bei einem Auswärtsspiel? Gehen Sie davon aus, dass die Erfolge bei den Siebenmeterwürfen stochastisch unabhängig sind!

Falls Sie Aufgabenteil c) nicht lösen konnten rechnen Sie bitte im Folgenden mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten weiter:

- Wahrscheinlichkeit für elf Treffer bei elf Siebenmeterwürfen bei einem Heimspiel: 0,6
 - Wahrscheinlichkeit für elf Treffer bei elf Siebenmeterwürfen bei einem Auswärtsspiel: 0,05
- Bei einem Spiel hat der Spieler die Gelegenheit zu elf Siebenmeterwürfen und erzielt dabei elf Tore. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses Spiel ein Heimspiel? Verwenden Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe c).

WT - F 2011

Aufgabe 4

Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X; Y)^T$ mit der gemeinsamen Dichtefunktion $f_{X,Y}(x,y)$ sei in dem von $a > 1$ begrenzten Gebiet G aus Abbildung 1 wie folgt verteilt:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot y^3 & \text{für } x, y \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

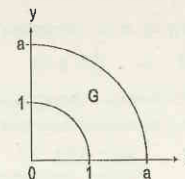


Abbildung 1: Gebiet G .

- Bestimmen Sie a !
- Nun sei $a > 1$ und wieder beliebig. Berechnen Sie die Randdichte $f_Y(y)$ in Abhängigkeit von a .

Aufgabe 5

Das Gewicht G von Maiskolben sei normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 .

- Bei einer Sorte Maiskolben sei $\mu = 180$ g und $\sigma = 15$ g. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Maiskolben zwischen 170 g und 200 g?
- Das Gewicht der Maiskörner beträgt 42 % des Gesamtgewichts eines Kolbens. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegen die Körner eines Kolbens mehr als 80 g?
- Bei einer zweiten Sorte Maiskolben sei das Gewicht G ebenfalls normalverteilt mit $\sigma = 8$ g und es sei $P(G > 90 \text{ g}) = 0,95$. Bestimmen Sie μ .

Aufgabe 6

Eine homogene Markoffkette X mit der Zustandsmenge $Z = \{A, B, C\}$ und dem Parameter α habe die Übergangsmatrix

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{4} & 1 - \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{4} & 1 - \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{4} \\ 1 - \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Skizzieren Sie den dazugehörigen Übergangsgraphen.
- In welchem Intervall kann α liegen?
- Nun sei $\alpha = 0,2$ und die Markoffkette befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand C. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zustände A, B und C nach einem ($t = 1$) und nach zwei ($t = 2$) Schritten.

Lösung:

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} P(\text{Moritz gewinnt} | 4:3 \text{ für Max}) &= P(\text{Moritz gewinnt die nächsten beiden Würfe}) \\ &= P(\text{Moritz gewinnt den nächsten Wurf}) \cdot P(\text{Moritz gewinnt den übernächsten Wurf}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \Rightarrow P(\text{Max gewinnt} | 4:3 \text{ für Max}) = \frac{3}{4}. \text{ D.h. Max stehen } 7,50 \text{ € zu.} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

- Es gilt $f(\vec{x}) = \alpha e^{-\alpha x_1} \cdot \beta e^{-\beta x_2} = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$, d.h. X_1 und X_2 sind unabhängig.
- $$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u,v) du dv = \alpha \int_0^{x_1} e^{-\alpha u} du \cdot \beta \int_0^{x_2} e^{-\beta v} dv = [-e^{-\alpha u}]_0^{x_1} \cdot [-e^{-\beta v}]_0^{x_2} \\ &= (1 - e^{-\alpha x_1}) (1 - e^{-\beta x_2}) = 1 - e^{-\alpha x_1} - e^{-\beta x_2} + e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)}; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$
- Mit der Lösung von Teilaufgabe b) ergibt sich sofort

$$F_{X_1}(x_1) = 1 - e^{-\alpha x_1}; \quad x_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad F_{X_2}(x_2) = 1 - e^{-\beta x_2}; \quad x_2 \geq 0.$$

WT - F 2011

d) Aus der Definition der Verteilungsfunktion folgt:

$$P(A) = P(X_1 \leq 1; X_2 \leq 1) = F(1; 1) = (1 - e^{-\alpha})(1 - e^{-\beta}) = 1 - e^{-\alpha} - e^{-\beta} + e^{-(\alpha+\beta)},$$

und weiter $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = e^{-\alpha} + e^{-\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}$.

e) Mit $B = \{X_1 > x_1; X_2 > x_2\} = \{X_1 > x_1\} \cap \{X_2 > x_2\}$ und der de Morgan'schen Formel ist $\bar{B} = \{X_1 \leq x_1\} \cup \{X_2 \leq x_2\}$ und damit

$$\begin{aligned} P(\bar{B}) &= P(X_1 \leq x_1) + P(X_2 \leq x_2) - P(X_1 \leq x_1; X_2 \leq x_2) \\ &= (1 - e^{-\alpha x_1}) + (1 - e^{-\beta x_2}) - (1 - e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)}) \\ &= 2 - e^{-\alpha x_1} - e^{-\beta x_2} - 1 + e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)} \\ &= 1 - e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (1 - e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)}) = e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)}.$$

Alternativ:

$$P(B) = (1 - F_{X_1}(x_1)) \cdot (1 - F_{X_2}(x_2)) = e^{-\alpha x_1} \cdot e^{-\beta x_2}.$$

Aufgabe 3

a) Die Auswahl erfolgt ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Daher gibt es

$$\binom{13}{6} = \frac{13!}{6! \cdot 7!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1716,$$

Möglichkeiten.

b) Es sei T das Ereignis „Treffer beim Siebenmeterwurf“ und H das Ereignis „Spiel ist ein Heimspiel“. Das Ereignis $\bar{H}$ bedeutet dann gerade „Spiel ist ein Auswärtsspiel“. Gegeben sind nun laut Aufgabenstellung die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(T|H) = 0,95$, $P(T|\bar{H}) = 0,75$ und $P(H) = 0,5$. Dann sind

$$P(\bar{T}|H) = 1 - P(T|H) = 0,05 \quad \text{und} \quad P(\bar{T}|\bar{H}) = 1 - P(T|\bar{H}) = 0,25$$

gerade die Wahrscheinlichkeiten, dass der Spieler bei einem Heimspiel bzw. einem Auswärtsspiel keinen Treffer bei einem Siebenmeterwurf erzielt. Mit dem Satz von Bayes erhält man nun für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{H}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})}{P(\bar{T}|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) + P(\bar{T}|H) \cdot P(H)} = \frac{0,25 \cdot 0,5}{0,25 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,5} = \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}.$$

c) Wir definieren zunächst das Ereignis T_{11} „Elf Treffer bei elf Siebenmeterwürfen“. Da laut Aufgabenstellung die Erfolge bei Siebenmeterwürfen als stochastisch unabhängig angenommen werden sollen, gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis T_{11} bei einem Heimspiel eintritt: $P(T_{11}|H) = 0,95^{11} = 0,568$

und für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis T_{11} bei einem Auswärtsspiel eintritt: $P(T_{11}|\bar{H}) = 0,75^{11} = 0,042$.

d) Wie in Teilaufgabe b) erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Formel von Bayes unter zur Hilfenahme der Ergebnisse aus Teilaufgabe c):

$$\begin{aligned} P(H|T_{11}) &= \frac{P(T_{11}|H) \cdot P(H)}{P(T_{11}|H) \cdot P(H) + P(T_{11}|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})} = \frac{0,568 \cdot 0,5}{0,568 \cdot 0,5 + 0,042 \cdot 0,5} \\ &= \frac{0,284}{0,305} = 0,931. \end{aligned}$$

Falls die Teilaufgabe c) nicht gelöst werden konnte sollte mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten weitergerechnet werden:

- Wahrscheinlichkeit für elf Treffer bei elf Siebenmeterwürfen bei einem Heimspiel: 0,6
- Wahrscheinlichkeit für elf Treffer bei elf Siebenmeterwürfen bei einem Auswärtsspiel: 0,05

Daraus ergibt sich dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(H|T_{11}) &= \frac{P(T_{11}|H) \cdot P(H)}{P(T_{11}|H) \cdot P(H) + P(T_{11}|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,6 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,5} \\ &= \frac{0,3}{0,325} = 0,923. \end{aligned}$$

WT - F 2011

Aufgabe 4

a) In Teilaufgabe a) soll der Parameter a berechnet werden. Die gegebene Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ gibt an, wie die Wahrscheinlichkeitsmasse 1 auf dem im ersten Quadranten sich befindenden Gebiet G verteilt ist. Daher muss allgemein gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = 1.$$

Zur Lösung dieses Doppelintegrals gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Verwendung des kartesischen Koordinatensystems

Ausgangspunkt sind die beiden Koordinatengleichungen

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \leftrightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \leftrightarrow \quad y^2 = a^2 - x^2 \quad \leftrightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

mit denen die Integrationsgrenzen entsprechend dem zu betrachteten Gebiet G angepasst werden. Das Doppelintegral kann dann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x \cdot y^3 dy dx + \int_1^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x \cdot y^3 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{4} x y^4 \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx + \int_1^a \left[\frac{1}{4} x y^4 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} x \left[(a^2 - x^2)^2 - (1 - x^2)^2 \right] dx + \int_1^a \frac{1}{4} x (a^2 - x^2)^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} x (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4 - 1 + 2x^2 - x^4) dx + \int_1^a \frac{1}{4} x (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} (a^4 - 1) x + \frac{1}{2} (1 - a^2) x^3 dx + \int_1^a \frac{1}{4} a^4 x - \frac{1}{2} a^2 x^3 + \frac{1}{4} x^5 dx \\ &= \left[\frac{1}{8} (a^4 - 1) x^2 + \frac{1}{8} (1 - a^2) x^4 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{8} a^4 x^2 - \frac{1}{8} a^2 x^4 + \frac{1}{24} x^6 \right]_1^a \\ &= \frac{1}{8} (a^4 - 1) + \frac{1}{8} (1 - a^2) + \frac{1}{8} a^6 - \frac{1}{8} a^6 + \frac{1}{24} a^6 - \frac{1}{8} a^4 + \frac{1}{8} a^2 - \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{8} a^4 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{24} a^6 - \frac{1}{8} a^4 + \frac{1}{8} a^2 - \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{24} a^6 - \frac{1}{24} = 1. \end{aligned}$$

Auflösen nach a liefert schliesslich die gesuchte Lösung:

$$a^6 - 1 = 24 \quad \leftrightarrow \quad a^6 = 25 \quad \leftrightarrow \quad a = \sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{5}.$$

2. Möglichkeit: Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten

Ausgangspunkt ist hierbei die allgemeine Transformationsvorschrift

$$\cos \phi = \frac{x}{r} \quad \leftrightarrow \quad x = r \cdot \cos \phi \quad \sin \phi = \frac{y}{r} \quad \leftrightarrow \quad y = r \cdot \sin \phi,$$

wobei r den Radius und ϕ die Phase bezeichnet sowie die Berechnung der Funktionaldeterminante

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r.$$

Mit dieser Funktionaldeterminante ergibt sich für das Flächenelement in Polarkoordinaten:

$$dA = |J| dr d\phi = r dr d\phi.$$

WT - F 2011

Damit ergibt sich für das zu lösende Doppelintegral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y^3 dy dx = \int_1^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos \phi \cdot r^3 \cdot \sin^3 \phi \cdot r d\phi dr \\ &= \int_1^a r^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \cdot \sin^3 \phi \cdot d\phi dr \stackrel{B.S., S. 1072, Nr. 356}{=} \int_1^a r^5 \left[\frac{1}{4} \sin^4 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_1^a \frac{1}{4} r^5 dr \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} r^6 \right]_1^a = \frac{1}{24} (a^6 - 1) \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Auflösen nach a liefert schliesslich die gesuchte Lösung:

$$a^6 - 1 = 24 \Leftrightarrow a^6 = 25 \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{5}.$$

b) In Teilaufgabe b) soll die Randdichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx,$$

in Abhängigkeit von a bestimmt werden. Für den Bereich $0 \leq y \leq 1$ erhält man

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x \cdot y^3 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{1}{2} y^3 [(a^2 - y^2) - (1 - y^2)] \\ &= \frac{1}{2} y^3 [a^2 - y^2 - 1 + y^2] = \frac{1}{2} y^3 (a^2 - 1). \end{aligned}$$

Für den zweiten Bereich $1 \leq y \leq a$ erhält man

$$f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x \cdot y^3 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{1}{2} y^3 (a^2 - y^2).$$

Zusammenfassend erhält man also für die Randdichte $f_Y(y)$ das folgende Ergebnis:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y^3 (a^2 - 1) & \text{für } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{2} y^3 (a^2 - y^2) & \text{für } 1 \leq y \leq a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 5

a) G ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 180$ g und $\sigma = 15$ g. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ein Maiskolben zwischen 170 g und 200 g wiegt, erhält man:

$$\begin{aligned} P(170 \text{ g} \leq G \leq 200 \text{ g}) &= \Phi\left(\frac{200 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}}\right) - \Phi\left(\frac{170 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) \\ \Phi(-x) &\stackrel{!}{=} 1 - \Phi(x) \\ &\approx 0,9098 - (1 - 0,7453) \\ &= 0,6551. \end{aligned}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Körner eines Kolbens mehr als 80 g wiegen, lässt sich wie folgt berechnen: Mit der Zufallsvariable G_K bezeichnen wir das Gewicht der Körner, für das laut Aufgabenstellung gilt: $G_K = 0,42 \cdot G$, wobei G das Gewicht des Maiskolbens ist. G_K ist ebenfalls eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 0,42 \cdot 180 \text{ g} = 75,6 \text{ g}$ und $\sigma = 0,42 \cdot 15 \text{ g} = 6,3 \text{ g}$. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit $P(G_K \geq 80 \text{ g})$. Diese lässt sich über das Gegenereignis wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(G_K \geq 80 \text{ g}) &= 1 - P(G_K < 80 \text{ g}) = 1 - \Phi\left(\frac{80 \text{ g} - 75,6 \text{ g}}{6,3 \text{ g}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0,6984) \approx 1 - 0,758 = 0,242. \end{aligned}$$

WT - F 2011

Alternativ kann diese Teilaufgabe auch wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} P(G_K \geq 80 \text{ g}) &= P(G \geq 190,476 \text{ g}) = 1 - P(G < 190,476 \text{ g}) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{190,476 \text{ g} - 180 \text{ g}}{15 \text{ g}}\right) = 1 - \Phi(0,6984) \approx 1 - 0,7580 = 0,242. \end{aligned}$$

c) In Teilaufgabe c) wird nun eine zweite Sorte Maiskolben betrachtet. Es ist bekannt, dass das Gewicht G dieser Sorte wiederum normalverteilt ist mit $\sigma = 8$ g. Ferner ist $P(G > 90 \text{ g}) = 0,95$ gegeben, d.h. es ist bekannt, dass Maiskolben dieser Sorte mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 mehr als 90 g wiegen.

Um nun den Mittelwert μ der Zufallsvariable G zu bestimmen, beschreibt man die gegebene Wahrscheinlichkeit $P(G > 90 \text{ g})$ zunächst über das Gegenereignis

$$P(G > 90 \text{ g}) = 1 - P(G \leq 90 \text{ g}) \stackrel{!}{=} 0,95$$

Gleichzeitig erfolgt die Transformation der normalverteilten Zufallsvariablen G in die standardnormalverteilte Zufallsvariable G_s durch

$$G_s = \frac{G - \mu}{\sigma},$$

wodurch sich für die vorgegebene Grenze von 90 g ein transformierter Wert von

$$g_s = \frac{90 \text{ g} - \mu}{8 \text{ g}},$$

ergibt. Die gegebene Wahrscheinlichkeit $P(G > 90 \text{ g})$ kann damit durch die Verteilungsfunktion der standardnormalverteilten Zufallsvariable G_s wie folgt ausgedrückt werden: $P(G > 90 \text{ g}) = P(G_s > g_s) = 1 - P(G_s \leq g_s) = 1 - \Phi(g_s) \stackrel{!}{=} 0,95$.

Durch Ausnutzung der Symmetrie der Verteilungsfunktion der standardnormalverteilten Zufallsvariable G_s , d.h. $\Phi(-g_s) = 1 - \Phi(g_s)$ erhält man den Zusammenhang

$$\Phi(-g_s) = \Phi\left(-\frac{90 \text{ g} - \mu}{8 \text{ g}}\right) \stackrel{!}{=} 0,95.$$

Nun muss das Argument x aus der Tabelle der Standardnormalverteilung abgelesen werden, für das $\Phi(x) = 0,95$ gilt. Durch Gleichsetzen des aus der Tabelle abgelesenen Wertes $x = 1,66$ mit dem Argument $-\frac{90 \text{ g} - \mu}{8 \text{ g}}$ erhält man:

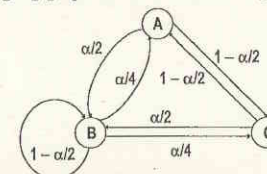
$$-\frac{90 \text{ g} - \mu}{8 \text{ g}} \stackrel{!}{=} 1,66.$$

Diese Gleichung muss jetzt nach dem gesuchten Mittelwert μ aufgelöst werden, wodurch sich folgendes Ergebnis ergibt:

$$-90 \text{ g} + \mu = 1,66 \cdot 8 \text{ g} \Leftrightarrow \mu = 90 \text{ g} + 1,66 \cdot 8 \text{ g} = 103,28 \text{ g}.$$

Aufgabe 6

a) Für den Übergangsgraph der Markoffkette X gilt:



b) In dieser Teilaufgabe soll das Intervall des Parameters α bestimmt werden. Wenn sich die Markoffkette X in einem Zustand i befindet, muß der Prozess in irgendeinen der endlich vielen Zustände $Z = \{A, B, C\}$ übergehen. D.h. die Zeilensumme der Übergangsmatrix von P_α ist eins für alle Zeilen. Somit ergibt sich unmittelbar für das Intervall von α : $\alpha \in [0, 2]$.

WT - F 2011

- c) Laut Aufgabenstellung soll der Parameter α im Folgenden den Wert 0,2 annehmen. Des Weiteren ist der Zustand C als Anfangszustand der Markoffkette zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgegeben, d.h. es gilt

$$\vec{p}^T(0) = (0, 0, 1).$$

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten der Zustände A , B und C nach k Schritten ($t = k$) erfolgt nun allgemein durch

$$\vec{p}^T(k) = \vec{p}^T(0) \cdot P_{0,2}^k.$$

Nach einem Schritt ($t = 1$) ergeben sich damit für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände A , B und C

$$\vec{p}^T(1) = \vec{p}^T(0) \cdot P_{0,2}^1 = (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} = (0,9, 0,1, 0),$$

so dass der Zustand A am wahrscheinlichsten ist. Nach zwei ($t = 2$) Schritten ergeben sich für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände A , B und C

$$\vec{p}^T(2) = \vec{p}^T(0) \cdot P_{0,2}^2 = (0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0,815 & 0,18 & 0,005 \\ 0,09 & 0,82 & 0,09 \\ 0,005 & 0,18 & 0,815 \end{pmatrix} = (0,005, 0,18, 0,815),$$

wobei

$$P_{0,2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,815 & 0,18 & 0,005 \\ 0,09 & 0,82 & 0,09 \\ 0,005 & 0,18 & 0,815 \end{pmatrix}.$$

D.h. der Zustand C ist jetzt am wahrscheinlichsten.