

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 1

- a) Es sei $(\Omega, \mathfrak{P}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A und B seien zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\bar{A}$ und $\bar{B}$ ebenfalls unabhängig sind.
- b) Die Ereignisse A und B seien unabhängig und es gelte $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt mindestens eines dieser Ereignisse ein?
- c) Im Folgenden sei mit den unabhängigen Ereignissen A und B $P(A) = \frac{3}{4}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie mithilfe der Ungleichung von Bonferroni

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}),$$

dass gilt:

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 2

Ein Apotheker versucht mit vier Substanzen A, B, C, D gleicher Menge ein Medikament zu mischen.

- a) Die Ergebnismenge ist $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Wie lautet die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$?
- b) Der Apotheker mischt durch zufällige Auswahl der Substanzen ein Medikament. Die Reihenfolge der Auswahl ist dabei unwichtig. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Medikament mit nur zwei Substanzen zu mischen, wobei allerdings die Substanz D nicht vorkommen darf?
- c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus den vier Substanzen drei auszuwählen, wenn dabei jede Substanz bis zu dreimal gezogen werden darf?
- d) Der Apotheker verfüge über einige Substanzen in doppelter und dreifacher Menge, die er in zufälliger Reihenfolge mischt. Ω sei dabei durch $\{A, A, B, B, B, C, D, D\}$ gegeben. Wieviele Mischungen sind jetzt möglich, wenn er alle Substanzen verwendet?

Aufgabe 3

Die Dichte der zweidimensionalen, normalverteilten Zufallsvariablen $\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ kann in der Form

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = C \exp\left(-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2)\right)$$

geschrieben werden. $\vec{X}$ besitze den Mittelwertvektor $\vec{\mu} = (1, -1)^T$ und die Kovarianzmatrix

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten der Komponenten X_1 und X_2 von $\vec{X}$.
- b) Die durch $Q(x_1, x_2) = 1$ bestimmte Höhenlinie ist eine Ellipse: Berechnen Sie die Längen a und b ihrer Hauptachsen sowie den Winkel γ , um den diese gegenüber dem Koordinatensystem gedreht sind.
- c) Skizzieren Sie die durch $Q(x_1, x_2) = 1$ bestimmte Höhenlinie.

Aufgabe 4

Das monatliche Einkommen X einer Person betrage mindestens x_0 Euro. Zur Beschreibung der Einkommensverteilung wird eine Dichtefunktion der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet, wobei $\alpha > 0$ ein fest vorgegebener Parameter ist.

- a) Bestimmen Sie c .
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ des Einkommens X .
- c) Setzen Sie speziell $\alpha = 1$ sowie $x_0 = 1000$ und berechnen Sie $P(X > 10000 | X \geq 5000)$, d.h. den Anteil derjenigen unter den mindestens 5000 Euro verdienenden Personen, die sogar über 10000 Euro verdienen.

WT - F2012

Aufgabe 5

In einer Seidenspinnerei werden Rohfäden von Seidenkokons abgewickelt und zu Seidenfäden versponnen. Es wird angenommen, dass die verwertbare Fadenlänge pro Kokon durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 800 \text{ m}$ und Varianz $\sigma^2 = 6400 \text{ m}^2$ angemessen beschrieben werden kann.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons mindestens 750 m beträgt.
- Welche verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 wenigstens erreicht?
- Wieviele Kokons müssen abgewickelt werden, damit mit mindestens 98 % Wahrscheinlichkeit die Gesamtlänge der verwertbaren Seidenfäden mindestens 100000 km beträgt?

Aufgabe 6

Eine Nachricht der Form ja wird durch mündliche Zwischenträger weitergegeben. Bei der Weitergabe wird

- **ja** mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in **nein** und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in **jein** verfälscht,
- **nein** mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in **ja** und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in **jein** verfälscht und
- **jein** mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in **nein** und mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in **ja** verfälscht.

Dieses System wird durch eine homogene Markoffkette X mit der Zustandsmenge $Z = \{\text{ja} = 1, \text{jein} = 2, \text{nein} = 3\}$ beschrieben. Der Anfangszustand ist $X(0) = \text{ja}$.

- Stellen Sie die dazugehörige Übergangsmatrix sowie den Übergangsgraphen auf.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Träger ($X(3)$) die Nachricht **ja** erhält?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgenden Zustandsverlauf:
 $P((X(0) = 1) \cap (X(2) = 1) \cap (X(4) = 1))$?

Lösung

Aufgabe 1

- A und B sind unabhängig, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A) + P(B) - P(A \cup B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ P(\overline{A \cap B}) &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ 1 - P(\overline{A \cap B}) &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ 1 - P(\overline{A \cap B}) &= 1 - (1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)) \\ 1 - P(\overline{A \cap B}) &= 1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ P(\overline{A \cap B}) &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ P(\overline{A \cap B}) &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

d.h. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind unabhängig.

- Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Ereignisse A und B eintritt gilt:

$$\begin{aligned} \text{c) Es gilt: } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &\geq 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \\ &= P(A) + P(B) - 1 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt: $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)) = \frac{1}{3}$. Daraus folgt: $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

WT - F2012

Aufgabe 2

- Die Potenzmenge lautet:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{A, B, C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}, \{B, C, D\}, \{A, B, C, D\}\}.$$

- Modell: Kombination ohne Wiederholung (Auswahl von 2 aus $(4-1)$ -Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

$$|C_{4-1}^{(2)}| = \binom{4-1}{2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3.$$

Die in Frage kommenden Möglichkeiten sind in diesem Fall $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$.

- Modell: Kombination mit Wiederholung (Auswahl von 3 aus 4 Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)

$$|\tilde{C}_4^{(3)}| = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

- Modell: Permutation (Anordnung von 8 Elementen, wobei Substanz A zweimal, B dreimal, C einmal und D zweimal vorkommt)

$$|\Pi_8^{(2,3,1,2)}| = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 1680.$$

Aufgabe 3

- Da $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ gilt, folgt $\rho\sigma_1\sigma_2 = 2\rho \stackrel{!}{=} 1 \rightarrow \rho = \frac{1}{2}$.

- Für die Berechnung des Winkels γ gilt:

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2}{4 - 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2}{3} \rightarrow \gamma = 16,85^\circ.$$

Daraus folgt $\sin \gamma = 0,290$, $\cos \gamma = 0,957$

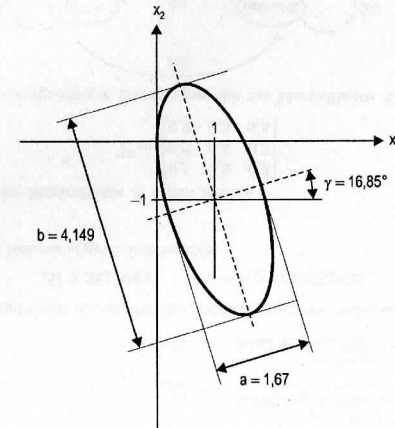
und damit wegen $K = Q(x_1; x_2) = 1$

$$\frac{a}{2} = 2 \sqrt{\frac{0,75}{1 \cdot 0,29^2 + 4 \cdot 0,957^2 + 2 \cdot 0,29 \cdot 0,957}} = 0,835 \rightarrow a = 1,67$$

und

$$\frac{b}{2} = 2 \sqrt{\frac{0,75}{1 \cdot 0,957^2 + 4 \cdot 0,29^2 - 2 \cdot 0,29 \cdot 0,957}} = 2,0745 \rightarrow b = 4,149.$$

- Skizze:



Aufgabe 4

- Es muss die folgende Bedingung gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \stackrel{!}{=} 1.$$

WT - F2012

Durch Einsetzen der Dichte $f_X(x)$ erhält man:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}} dx = c \cdot \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} dx = c \cdot \left[\frac{-x^{-\alpha-1+1}}{\alpha} \right]_{x_0}^{\infty} = \frac{c}{\alpha} \cdot \left[-\frac{1}{x^{\alpha}} \right]_{x_0}^{\infty} = \frac{c}{\alpha} \cdot \left[0 + \frac{1}{x_0^{\alpha}} \right] = \frac{c}{\alpha \cdot x_0^{\alpha}} \stackrel{!}{=} 1.$$

Die Konstante c ergibt sich daraus zu: $c = \alpha \cdot x_0^{\alpha}$.

Damit gilt für die Dichtefunktion: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) Die Verteilungsfunktion lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \int_{x_0}^x \frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{u^{\alpha+1}} du = \alpha \cdot x_0^{\alpha} \int_{x_0}^x \frac{1}{u^{\alpha+1}} du = \alpha \cdot x_0^{\alpha} \cdot \left[\frac{u^{-\alpha-1+1}}{-\alpha-1+1} \right]_{x_0}^x \\ &= \alpha \cdot x_0^{\alpha} \cdot \left[\frac{u^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{x_0}^x = -x_0^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{u^{\alpha}} \right]_{x_0}^x = -x_0^{\alpha} \cdot \left[\frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{x_0^{\alpha}} \right] = -\frac{x_0^{\alpha}}{x^{\alpha}} + 1 = 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Verteilungsfunktion lautet somit:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha} & \text{für } x \geq x_0. \end{cases}$$

c) Für $\alpha = 1$ und $x_0 = 1000$ lautet die Verteilungsfunktion aus Teilaufgabe b):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1000 \\ 1 - \frac{1000}{x} & \text{für } x \geq 1000. \end{cases}$$

Damit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X > 10000 | X \geq 5000)$ wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} P(X > 10000 | X \geq 5000) &= \frac{P(X > 10000)}{P(X \geq 5000)} = \frac{1 - P(X \leq 10000)}{1 - P(X \leq 5000)} = \frac{1 - F_X(10000)}{1 - F_X(5000)} \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1000}{10000}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1000}{5000}\right)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Menge unabhängiger $\mathcal{N}(800; 80^2)$ -verteilter Zufallsvariablen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 750) &= 1 - P(X_1 < 750) = 1 - \Phi\left(\frac{750 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{750 - 800}{80}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{50}{80}\right) \\ &= 1 - 1 + \Phi(0,625) \approx 0,7323, \end{aligned}$$

wobei die Tabelle der Standardnormalverteilung herangezogen werden muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass die verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons mindestens 750 m ist, ist 73,23 %.

b) Es sei $X_1, X_2, \dots$ eine Menge unabhängiger $\mathcal{N}(800; 80^2)$ -verteilter Zufallsvariablen. Die verwertbare Fadenlänge wird mit der Randbedingung

wie folgt berechnet: $P(X_1 \geq x) \stackrel{!}{=} 0,8$

$$P(X_1 \geq x) = P\left(\frac{X_1 - 800}{80} \geq \frac{x - 800}{80}\right) = P\left(Y_1 \leq -\frac{x - 800}{80}\right) = \Phi\left(-\frac{x - 800}{80}\right) \stackrel{!}{=} 0,8.$$

Mithilfe der Tabelle der Standardnormalverteilung ergibt sich daraus für die gesuchte Fadenlänge x :

$$-\frac{x - 800}{80} = 0,86 \quad \rightarrow x = 731,2 \text{ m}$$

D.h. mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 beträgt die verwertbare Fadenlänge mindestens 731,2 m.

c) Die Zufallsvariable $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{N}(n \cdot 800; n \cdot 80^2)$ -verteilt. Gesucht ist nun die Anzahl der abzuwickelnden Kokons $n, n \in \mathbb{N}$, für die gilt:

$$P(S_n \geq 10^8) \geq 0,98.$$

Die Berechnung von n erfolgt wie folgt:

$$1 - P(S_n < 10^8) \geq 0,98 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{10^8 - n \cdot 800}{\sqrt{n} \cdot 80}\right) \geq 0,98 \Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{10^8 - n \cdot 800}{\sqrt{n} \cdot 80}\right) \geq 0,98,$$

wobei die Eigenschaft $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ausgenutzt wurde. Mithilfe der Tabelle der Standardnormalverteilung ergibt sich daraus die Ungleichung

$$\text{die nach } n \text{ wie folgt aufzulösen ist: } -\frac{10^8 - n \cdot 800}{\sqrt{n} \cdot 80} \geq 2,06,$$

WT - F2012

$$\begin{aligned} -10^8 + 800 \cdot (\sqrt{n})^2 &\geq 2,06 \cdot 80 \cdot \sqrt{n} \\ 800 \cdot (\sqrt{n})^2 - 2,06 \cdot 80 \cdot \sqrt{n} - 10^8 &\geq 0 \\ (\sqrt{n})^2 - 2,06 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{n} - 125000 &\geq 0 \\ (\sqrt{n})^2 - 0,206 \cdot \sqrt{n} - 125000 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{0,206 \pm \sqrt{(0,206)^2 + 4 \cdot 125000}}{2}$$

$$\sqrt{n} \geq 0,103 \pm \sqrt{(0,103)^2 + 125000}.$$

Als sinnvolle Lösung ergibt sich hieraus für die Anzahl der abzuwickelnden Kokons n :

$$\sqrt{n} \geq 353,6564 \quad \rightarrow n \geq 125072,8532,$$

D.h. es müssen 125073 Kokons abgewickelt werden.

Aufgabe 6

a) Die Übergangsmatrix der Markoffkette X ergibt sich zu

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Abbildung 1 zeigt den dazugehörigen Übergangsgraph der Markoffkette X :

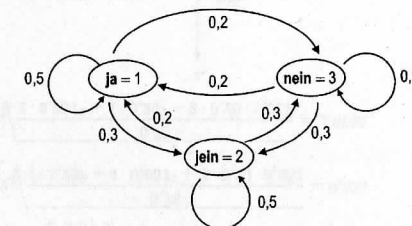


Abbildung 1: Übergangsgraph der Markoffkette X .

b) Zur Berechnung von $P(X(3) = \text{ja})$ bzw. von $P(X(3) = 1)$, d.h. der Wahrscheinlichkeit, dass nach 3 Zwischenträgern der Empfänger die Nachricht ja erhält, muss

$$\vec{p}(3) = \vec{p}^T(0) \cdot \overline{P}^3$$

mit $\vec{p}(0) = (1; 0; 0)^T$ (Anfangszustand ist ja) und der Übergangsmatrix $\overline{P}$ aus Teilaufgabe a) berechnet werden. Dabei ergibt sich für $\overline{P}^3$:

$$\overline{P}^3 = \overline{P} \cdot \overline{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,35 & 0,36 & 0,29 \\ 0,26 & 0,4 & 0,34 \\ 0,26 & 0,36 & 0,38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,305 & 0,372 & 0,323 \\ 0,278 & 0,38 & 0,342 \\ 0,278 & 0,372 & 0,35 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich für $\vec{p}(3)$: $\vec{p}(3) = (1; 0; 0) \cdot \overline{P}^3 = (0,305; 0,372; 0,323)$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 3 Zwischenträgern der Empfänger die Nachricht ja erhält ist also $P(X(3) = 1) = 0,305$. D.h. nur in 30,5 % aller Fälle wird ein ja nach 3 Zwischenträgern auch als ja empfangen.

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann durch

$$\begin{aligned} &P((X(0) = 1) \cap (X(2) = 1) \cap (X(4) = 1)) \\ &= P(X(0) = 1) \cdot P(X(2) = 1 | X(0) = 1) \cdot P(X(4) = 1 | X(2) = 1) \end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Zu deren Bestimmung muss der Anfangszustand $\vec{p}^T(0) = (1; 0; 0)$ und die Übergangsmatrix $\overline{P}^2$ verwendet werden. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned} P(X(0) = 1) &= 1 \\ P(X(2) = 1 | X(0) = 1) &= (\vec{p}(2))_1 = 0,35 \\ P(X(4) = 1 | X(2) = 1) &= (\vec{p}(2))_1 = 0,35, \end{aligned}$$

wobei $(\vec{p}(2))_1$ den ersten Eintrag von $\vec{p}^T(0) \cdot \overline{P}^2$ bezeichnet. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit für den gegebenen Zustandsverlauf ergibt sich damit zu:

$$P((X(0) = 1) \cap (X(2) = 1) \cap (X(4) = 1)) = 1 \cdot 0,35^2.$$