

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach
Wahrscheinlichkeitstheorie
26.02.2016

Musterlösung

Hinweise zur Prüfung

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an. Verwenden Sie bei der Bearbeitung keine rote Farbe und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Beachten Sie besonders: **Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein**, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann. Schreiben Sie leserlich.

Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner. **Schalten Sie alle anderen elektronischen Geräte für die Dauer der Prüfung aus.**

Abzugeben

sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten Ausarbeitungen.

Nicht abzugeben

sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Das Ergebnis

Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **07.04.2016** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG).

Klausureinsicht

ist am **13.04.2016** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). Es wird nach der letzten Ziffer der Matrikelnummer unterteilt: **0,1,2,3** von **12:00 bis 14:00 Uhr**, **4,5,6** von **14:00 bis 16:00 Uhr** und **7,8,9** von **16:00 bis 18:00 Uhr**.

Aufgabe 1

Die Dichte der zweidimensional normalverteilten Zufallsvariablen $\vec{X} = (X_1; X_2)^T$ kann in der Form $f(\vec{x}) = C \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(\vec{x})\right\}$ mit $Q(\vec{x}) = (\vec{x} - \vec{\mu})^T \overline{\Sigma}_2^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})$ dargestellt werden. Dabei ist

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

wobei $\vec{\mu}$ der Mittelwertvektor und $\overline{\Sigma}_2$ die Kovarianzmatrix von $\vec{X}$ sind.

- Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten der Komponenten X_1 und X_2 .
- Die durch $Q(\vec{x}) = 1$ bestimmte Höhenlinie ist eine Ellipse. Berechnen Sie die Länge ihrer Hauptachsen A und B sowie den Winkel γ , um den diese gegenüber dem Koordinatensystem gedreht sind.
- Skizzieren Sie die durch $Q(\vec{x}) = 1$ bestimmte Höhenlinie.

Lösung

- Der Korrelationskoeffizient kann aus der gegebenen Kovarianzmatrix bestimmt werden:

$$\overline{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 2 \Rightarrow \underline{\rho = 0,5}$$

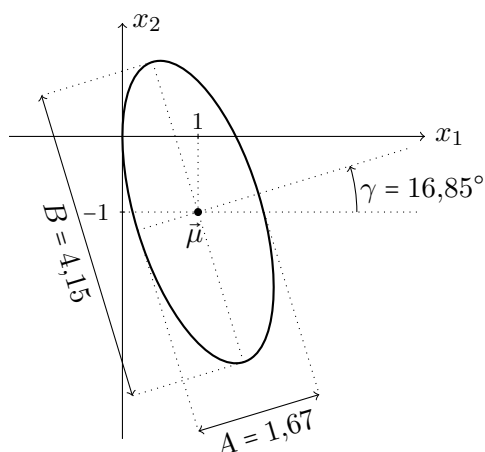
- Der gesuchte Winkel und die beiden Hauptachsen können direkt berechnet werden ($K=1$):

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \approx 0,294 \quad (\cong 16,85^\circ)$$

$$A = 2a = 2\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{K(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 \sin^2 \gamma + \sigma_2^2 \cos^2 \gamma + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \sin \gamma \cos \gamma}} \approx 2 \cdot 0,83 \approx \underline{1,67}$$

$$B = 2b = 2\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{K(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 \cos^2 \gamma + \sigma_2^2 \sin^2 \gamma - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \sin \gamma \cos \gamma}} \approx 2 \cdot 2,07 \approx \underline{4,15}$$

-



Aufgabe 2

Betrachtet werden N Spielsteine, die mit „1“ beginnend durchnummeriert und abwechselnd (mod 3) mit einer von drei Farben markiert sind. N ist ein Vielfaches von drei. Die Spielsteine werden in zufälliger Reihenfolge aufeinander gestapelt.

- a) Geben Sie die Anzahl verschiedener Stapelungen an, wenn (i) nur die Färbung bzw. (ii) nur die Nummerierung der Spielsteine beachtet wird.

Pro Runde werden nacheinander von oben drei Spielsteine abgehoben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- b) für $N = 9$ in der Runde eins genau zwei der abgehobenen Spielsteine die selbe Farbe haben.
 c) für $N = 12$ die Summe der abgehobenen Spielsteine in der ersten Runde nicht größer als neun ist und diese unterschiedliche Farben haben.
 d) für $N = 15$ in der zweiten Runde nur Steine unterschiedlicher Farbe abgehoben werden, wenn davor nur Steine einer Farbe abgehoben wurden.

Lösung

- a) (i) Permutation der N Spielsteine mit drei unterscheidbaren Gruppen der Größe K :

$$|\Pi_N^{(K,K,K)}| = \frac{N!}{K!K!K!} \quad \text{mit} \quad K = N/3$$

- (ii) Alle Spielsteine sind unterscheidbar: $|\Pi_N| = N!$.

- b) Hypergeometrische Verteilung: Aus N Spielsteinen werden $n = 3$ gezogen, wobei $k = 2$ davon aus $M = 3$ „günstigen“ sein sollen. Dabei kann jede der drei Farben „günstig“ sein. Alternativ kann ein Modell mit drei einzelnen Abhebungen verwendet werden, wobei sich für alle $|\Pi_3^{(2,1)}| = 3!/2! = 3$ möglichen Reihenfolgen die selbe Wahrscheinlichkeit ergibt.

$$p_b = 3 \cdot \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{54}{84} = \underline{64,29\%} \quad \text{oder} \quad p_b = 3 \cdot \left(\frac{9}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} \right) = \frac{9}{14} = 64,29\%$$

- c) Den Farben sind die Spielsteine $\{1, 4, 7, 10\}$ bzw. $\{2, 5, 8, 11\}$ bzw. $\{3, 6, 9, 12\}$ zugeordnet. Günstige Ziehungen bestehen aus je einer dieser Zahlen. Die kleinst mögliche Summe ist $1+2+3 = 6$. Es zeigt sich, dass von jeder Farbe gerade noch der Stein mit der zweitkleinsten Nummer verwendet werden kann: $4+2+3 = 1+5+3 = 1+2+6 = 9$. Von den insgesamt $|\Omega| = |C_{12}^{(3)}| = \binom{12}{3} = 220$ gleichwahrscheinlichen Ziehungen (Laplace) sind also vier günstig. Alternativ kann ein Modell mit drei einzelnen Abhebungen ohne Beachtung der Reihenfolge ($|\Pi_3| = 3! = 6$) verwendet werden:

$$p_c = \frac{4}{|\Omega|} = \underline{1,82\%} \quad \text{oder} \quad p_c = 6 \cdot \left(\frac{4}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} \right) = 1,82\%$$

- d) In der zweiten Runde sind noch zwölf Spielsteine auf dem Stapel: zwei mit der in der ersten Runde gezogenen Farbe und je fünf mit den anderen beiden Farben. Zur Lösung können wieder die Hypergeometrische Verteilung oder ein Modell mit drei einzelnen Abhebungen ohne Beachtung der Reihenfolge ($|\Pi_3| = 3! = 6$) verwendet werden:

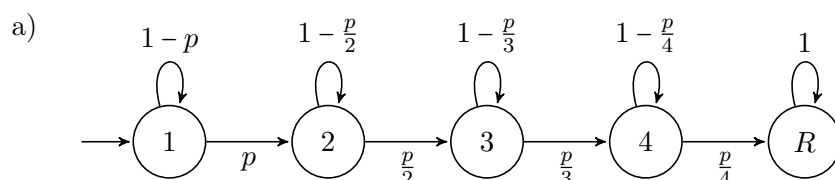
$$p_d = \frac{\binom{2}{1} \binom{5}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \underline{22,73\%} \quad \text{oder} \quad p_d = 6 \cdot \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{10} \right) = 22,73\%$$

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein Prozess mit K Zuständen, bei dem der Übergang zwischen den Zuständen zufällig erfolgt. Der Prozess wird als diskrete Markoffkette modelliert. Er beginnt in Zustand 1, durchläuft linear alle K Zustände und endet in einen zusätzlichen Ruhezustand. Die Wahrscheinlichkeit für einen Wechsel von Zustand k zu Zustand $k+1$ bzw. den Ruhezustand sei p/k mit $p > 0$ für $1 \leq k \leq K$, ansonsten wird in Zustand k verblieben.

- Zeichnen Sie für $K = 4$ den Übergangsgraphen.
- Bestimmen Sie die mittlere Dauer des Prozesses für alle $K \in \mathbb{N}$ und berechnen Sie für $K = 10$ den Parameter p so, dass sich eine mittlere Prozessdauer von 88 Schritten ergibt.
- Für $k = 3$ liegt die Zustandsverteilung $(0,1; 0,2; 0,6; 0,1)^T$ vor. Berechnen Sie die mittlere Dauer bis zum Ende des Prozesses in Abhängigkeit von p .
- Der Prozess soll nun zyklisch ablaufen: Der Ruhezustand wird entfernt und mit der Wahrscheinlichkeit p/K direkt von Zustand K zu Zustand 1 gegangen. Finden Sie für $K = 2$ eine Zustandsverteilung, die über die Zeit konstant bleibt.

Lösung



- b) Gesucht ist m_1 . Es gilt $m_R = (m_{K+1} =) 0$ und für $k \leq K$

$$m_k = 1 + \left(1 - \frac{p}{k}\right) m_k + \frac{p}{k} m_{k+1} = \frac{k}{p} + m_{k+1} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^K k \stackrel{(B.5)}{=} \frac{K(K+1)}{2} \cdot p^{-1}$$

Für $K = 10$ ist $m_1 = 55/p \stackrel{!}{=} 88$ und somit $p = 0,625$.

- c) Es ist $m_R = 0$, $m_3 = 3/p$, $m_2 = 5/p$ und $m_1 = 6/p$ und somit:

$$\bar{m} = 0,1 \cdot m_1 + 0,2 \cdot m_2 + 0,6 \cdot m_3 + 0,1 \cdot m_R = \underline{3,4 \cdot p^{-1}}$$

- d) Für $K = 2$ ist die modifizierte Übergangsmatrix

$$\overline{P}_* = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ \frac{p}{2} & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist der stochastische Eigenvektor $\vec{p}_{ss} = \overline{P}_*^T \vec{p}_{ss}$, zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$(\overline{P}_*^T - \lambda E_2) \vec{p}_{ss} = \begin{bmatrix} (1-p)-1 & \frac{p}{2} \\ p & (1-\frac{p}{2})-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es folgt $p_2 = 2p_1$ und wegen $p_1 + p_2 = 1$ schließlich $\vec{p}_{ss} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$.

Aufgabe 4

Ein Passagier-Flugzeug von Typ *Airbus A380* hat 420 Sitzplätze in der *Economy*-Klasse. Obwohl nicht mehr Passagiere mitgenommen werden können als Sitzplätze verfügbar sind, werden üblicherweise zu viele Tickets ausgegeben.

Eine solche Überbuchung eines Fluges wird durch das Verhältnis der zu viel ausgegebenen Tickets zu tatsächlich vorhandenen Sitzplätzen beschrieben. Es wird angenommen, dass Passagiere unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,93 zu ihrem Flug erscheinen.

- Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $X =$ „Anzahl erscheinender Passagiere in der *Economy*-Klasse“ an. Prüfen Sie die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes und geben Sie eine Verteilung an, mit der X approximiert werden kann.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten bei einer Überbuchung von 5% alle erscheinenden Passagiere (der *Economy*-Klasse) einen Platz?
- Zwei Stunden vor dem Abflug sind schon 420 Passagiere der *Economy*-Klasse erschienen. Der Flug ist 5% überbucht. Weitere erscheinende Passagiere der *Economy*-Klasse sollen einen Platz in der *Business*-Klasse erhalten.
Wie viele Plätze müssen dort mindestens zur Verfügung stehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 alle diese Passagiere einen Platz erhalten?

Lösung

- Es liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern $N = (1 + u)S_E$ und $p = 0,93$ vor ($S_E = 420$). Mit dem Satz von Moivre-Laplace kann mit einer Normalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(pN; p(1-p)N)$$

approximiert werden. Da $\sigma^2 > p(1-p)S_E = 27 \geq 9$ ist diese auch hinreichend genau.

- Es ist $N = 441$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$p_b = P(X \leq S_E) = \Phi\left(\frac{S_E - pN}{\sqrt{p(1-p)N}}\right) = \Phi(1,842) \approx \underline{96,71\%} \quad (\text{exakt: } 96,73\%)$$

- Gesucht ist S_B , so dass insgesamt $S_X = S_E + S_B$ Passagiere mitgenommen werden können. Je größer S_X , desto größer auch die Wahrscheinlichkeit, dass alle erscheinenden Passagiere mitgenommen werden können.

$$\begin{aligned} P(X \leq S_X | X \geq S_E) &= \frac{P(S_E \leq X \leq S_X)}{P(X \geq S_E)} = \frac{P(X \leq S_X) - p_b}{1 - p_b} \stackrel{!}{\geq} 0,9 \\ \Rightarrow P(X \leq S_X) &\stackrel{b)}{=} \Phi\left(\frac{S_X - pN}{\sqrt{p(1-p)N}}\right) \stackrel{!}{\geq} 0,9967 \approx \Phi(2,72) \quad (\text{exakt: } \Phi(2,718)) \\ \Rightarrow S_X &\geq 2,72 \cdot \sqrt{p(1-p)N} + pN = 424,70 \quad \Rightarrow S_B \geq 4,70 \end{aligned}$$

Es müssen mindestens fünf Sitzplätze in der Business-Klasse zur Verfügung stehen.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & , x \leq 0 \\ ax + b & , 0 < x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x \end{cases}$$

mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

- Nennen Sie die vier Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.
- Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass $F(x)$ die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.
- Berechnen Sie $E\{X\}$ und $D^2\{X\}$.
- Geben Sie die Funktion an, die X in eine normierte Zufallsvariable transformiert.

Lösung

- $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
 - monoton nichtfallend: $x_1 \leq x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$
 - rechtsseitig stetig: $F(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- b) Dazu muss $F(x)$ stetig sein:

$$\begin{array}{lll} x = 0 : & \frac{1}{2}e^x \stackrel{!}{=} ax + b & \Rightarrow \underline{b = \frac{1}{2}} \\ x = 1 : & ax + b \stackrel{!}{=} 1 & \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}} \end{array}$$

- c) Zunächst wird die Dichte von X berechnet und daraus die gesuchten Momente:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & , x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , 1 < x \end{cases} \\ E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \stackrel{(C.2)}{=} \frac{1}{2} \left[e^x (x-1) \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{4} = \underline{-\frac{1}{4}} \\ E\{X^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx \stackrel{(C.3)}{=} \frac{1}{2} \left[e^x (x^2 - 2x + 2) \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{6} = \underline{\frac{7}{6}} \\ D^2\{X\} &= E\{X^2\} - E^2\{X\} = \underline{\underline{\frac{53}{48}}} \end{aligned}$$

- d) Eine normierte Zufallsvariable hat den Erwartungswert null und die Varianz eins:

$$\bar{X} = g(X) = \frac{X - E\{X\}}{D\{X\}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{48}{53}} \left(X + \frac{1}{4} \right)}}$$

Aufgabe 6

Geben Sie die Formeln für die AKF $\varphi_{ZZ}(\tau)$ und das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{ZZ}(f)$

- für das komplexe weiße Gauß'sche Rauschen der Leistungsdichte $N_0 \frac{\text{W}}{\text{Hz}}$,
- für das auf $\frac{B}{2} = 1 \text{ MHz}$ tiefpassbegrenzte komplexe weiße Gauß'sche Rauschen der mittleren Leistung $2N_0 \cdot 10^6 \text{ W}$

an.

- Skizzieren Sie die vier Funktionen aus a) und b). Achten Sie dabei besonders auf die richtige Beschriftung der Achsen!
- Begründen Sie, warum komplexes weißes Gauß'sches Rauschen nicht erzeugt werden kann.

Lösung

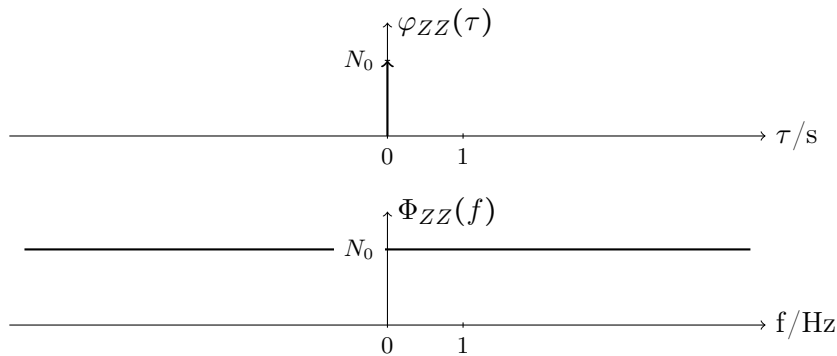
a) $\Phi_{ZZ}(f) = N_0 \quad \forall f \in \mathbb{R}$ $\bullet \text{---} \circ \quad \varphi_{ZZ}(\tau) = N_0 \delta(\tau)$

b) Wegen $P_0 = \varphi_{\tilde{Z}\tilde{Z}}(0) = N_0 B$ ist

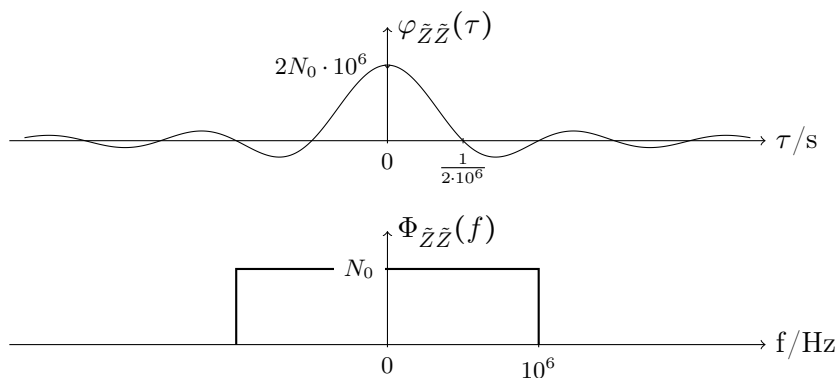
$$\Phi_{\tilde{Z}\tilde{Z}}(f) = \begin{cases} P_0/B & \text{für } |f| \leq \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} N_0 & \text{für } -1 \text{ MHz} \leq f \leq 1 \text{ MHz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi_{\tilde{Z}\tilde{Z}}(\tau) = P_0 \text{si}(\pi B \tau) = N_0 \frac{\sin(\pi \cdot 2 \cdot 10^6 \tau)}{\pi \tau}$$

c) Aus Teilaufgabe a):



Aus Teilaufgabe b):



- Leistung und Bandbreite sind nicht endlich. Komplexwertige Signale existieren nicht.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.4})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.6})$$