

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach  
**Wahrscheinlichkeitstheorie**  
24.02.2017

# Musterlösung

## Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vordruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vordruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg** und die **gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

**Abzugeben** sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

## Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

## Nach der Prüfung

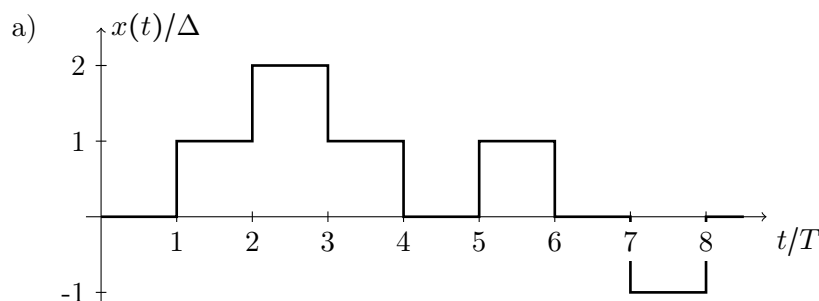
Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **18.04.2017** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **25.04.2017** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). Es wird nach der letzten Ziffer der Matrikelnummer unterteilt: **0,1,2,3** von **12:00 bis 14:00 Uhr**, **4,5,6** von **14:00 bis 15:30 Uhr** und **7,8,9** von **15:30 bis 17:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **02.05.2017** statt.

## Aufgabe 1

Sie beobachten den folgenden stochastischen Prozess  $X(t)$ : Ein Teilchen wandert, beginnend bei  $t = 0$ ,  $X(0) = 0$ , längs der Zeitachse. Zu den Zeitpunkten  $t = nT$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$  werden stochastisch unabhängige Würfe mit einer fairen Münze ausgeführt. Als Reaktion auf einen Münzwurf springt das Teilchen, wenn Kopf (K) fällt, um die Sprunghöhe  $\Delta$  nach oben und, wenn Zahl (Z) fällt, um  $\Delta$  nach unten.

- Skizzieren Sie den Pfad von  $X(t)$  bis zum Zeitpunkt  $8T$ , wenn die ersten acht Münzwürfe die Ausgangsfolge KKZZKZZK liefern.
- Berechnen Sie  $E(X(nT))$  und  $D^2(X(nT))$ .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(|X(1000T)| \leq 100)$  für  $\Delta = 2$  approximativ.
- Berechnen Sie  $\varphi_{XX}(n, m)$  und untersuchen Sie auf Stationarität.

## Lösung



- b) Es gilt  $X(nT) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  und die Zufallsvariablen  $Y_n$  sind mit  $p = \frac{1}{2}$  und den Werten  $+\Delta$  und  $-\Delta$  zweipunktverteilt. Es folgt  $E(Y_n) = \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(-\Delta) = 0$  und  $D^2(Y_n) = \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}(-\Delta)^2 = \Delta^2$ . Wegen der Unabhängigkeit der Würfe gilt:

$$E(X(nT)) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n) = \underline{0}$$

$$D^2(X(nT)) = D^2(Y_1) + D^2(Y_2) + \dots + D^2(Y_n) = \underline{n\Delta^2}$$

- c) Wie im vorigen Aufgabenteil gezeigt, ist  $X(1000T)$  die Summe von  $N = 1000$  unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit  $m = 0$  und  $d^2 = \Delta^2 = 4$ .

$$P(-100 \leq X(NT) \leq 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - Nm}{\sqrt{N}d}\right) - \Phi\left(\frac{-100 - Nm}{\sqrt{N}d}\right) = \Phi(1,58) - \Phi(-1,58)$$

$$= 2 \cdot 0,942947 - 1 = \underline{0,8859} \quad (\text{exakt: } 0,8862)$$

- d) Allgemein gilt  $\varphi_{XX}(n, m) = E(X(nT)X(mT))$ . Weiter ist  $E(Y_i Y_j) = \Delta^2 \delta_{ij}$ .

$$\varphi_{XX}(n, m) = E\left(\sum_{i=0}^n Y_i \cdot \sum_{j=0}^m Y_j\right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m E(Y_i Y_j) = \sum_{i=0}^{\min\{n, m\}} E(Y_i^2) = \min\{n, m\} \Delta^2$$

$\varphi_{XX}(n, m)$  ist nicht nur von der Zeitdifferenz  $n - m$  abhängig und daher ist der Prozess nicht stationär.

## Aufgabe 2

Gegeben sind die normalverteilte Zufallsvariable  $N$  mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz  $\sigma^2$  sowie die davon unabhängige zweipunktverteilte Zufallsvariable  $A \in \{a_1, a_2\}$  mit  $a_2 = a_1 + 3\sigma$  und  $P(A=a_1) = p$ . Betrachtet wird  $S = A + N$ .

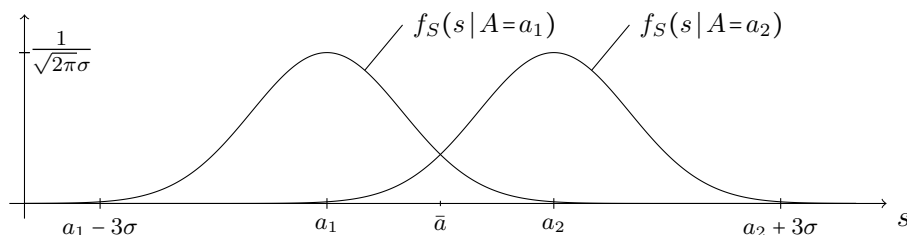
- Geben Sie die „Dichte“ von  $A$  an und berechnen Sie  $f_S(s)$ .
- Skizzieren Sie die Dichten  $f_S(s | A=a_1)$  und  $f_S(s | A=a_2)$  in ein Koordinatensystem.
- Berechnen Sie  $P(S > \frac{1}{2}(a_2 + a_1) | A=a)$  für  $a \in \{a_1, a_2\}$ .
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $S \leq a_2$  für  $p = 0,5$ ?

## Lösung

a)  $f_A(a) = p \cdot \delta(a - a_1) + (1 - p) \cdot \delta(a - a_2)$

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_N(s-a) f_A(a) da = p \cdot f_N(s-a_1) + (1-p) \cdot f_N(s-a_2) \\ &= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(s-a_1)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(s-a_1-3\sigma)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

- b) Die beiden Dichten ergeben sich aus einer Verschiebung der Dichte  $f_N(s)$  um  $a_1$  bzw.  $a_2$ .



- c) Mit  $S_1 \sim \mathcal{N}(a_1; \sigma^2)$  und  $\bar{a} = \frac{1}{2}(a_2 + a_1)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} P(S > \bar{a} | A=a_1) &= 1 - P(S_1 \leq \bar{a}) = 1 - P\left(S_1 \leq a_1 + \frac{3}{2}\sigma\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a_1 + \frac{3}{2}\sigma - a_1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1,50) = \underline{6,68\%}. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der beiden bedingten Dichten um  $s = \bar{a}$ , ist

$$P(S > \bar{a} | A=a_2) = 1 - P(S > \bar{a} | A=a_1) = \Phi(1,50) = \underline{93,32\%}.$$

- d) Es ist  $N \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2)$  und damit  $F_N(n) = \Phi(n/\sigma)$ :

$$\begin{aligned} P(S \leq a_2) &\stackrel{a)}{=} \int_{-\infty}^{a_2} p \cdot f_N(s-a_1) + (1-p) \cdot f_N(s-a_2) ds = \frac{1}{2}F_N(3\sigma) + \frac{1}{2}F_N(0) \\ &= \frac{1}{2}[\Phi(3,00) + \Phi(0,00)] = \frac{1}{2}(0,99865 + 0,5) = \underline{74,93\%} \end{aligned}$$

## Aufgabe 3

Betrachtet wird eine Folge identisch verteilter Zufallsvariablen  $Z_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und den Wahrscheinlichkeiten  $P(Z_n = m) = m P(Z_n = 1)$  für  $0 < m \leq M$ . Weiter zähle die Zufallsvariable  $X_m$  die Vorkommnisse des Ergebnisses  $m$  in  $\{Z_n\}_{n=0}^{N-1}$ .

- Bestimmen Sie die Verteilung von  $Z_n$ .
- Berechnen Sie  $P(X_9 = 2 \wedge X_{10} \neq 2)$  für  $M = 10$  und  $N = 11$  für unabhängige  $Z_n$ .

Die Verteilung von  $Z_n$  sei die Anfangsverteilung einer homogenen diskreten Markovkette mit  $M$  Zuständen und den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij} = (1 - \delta_{ij})/(M - 1)$ .

- Berechnen Sie die Zustandsverteilung nach zwei Schritten für  $M = 3$ .
- Es sei  $\vec{p}^T(n) = (1 \ 0 \ 0)$ . Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den  $N$  folgenden Schritten genau einmal Zustand 3 eingenommen wurde.
- Geben Sie die stationäre Verteilung der Markovkette in Abhängigkeit von  $M$  an.

## Lösung

- Mit  $p_m = P(Z_n = m)$  folgt  $1 \stackrel{!}{=} \sum_{m=1}^M p_m = p_1 \sum_{m=1}^M m \stackrel{(B.5)}{=} p_1 \frac{M}{2} (M + 1) \Rightarrow p_m = \frac{2m}{M(M + 1)}$
- Es gilt  $p_9 = \frac{9}{55}$  und  $p_{10} = \frac{2}{11}$ . Da die Wiederholungen identisch und unabhängig sind, liegt eine Binomial- bzw. Polynomialverteilung vor:

$$\begin{aligned} P(X_9 = 2 \wedge X_{10} \neq 2) &= P(X_9 = 2) - P(X_9 = 2 \wedge X_{10} = 2) \\ &= \binom{11}{2} p_9^2 (1 - p_9)^9 - \frac{11!}{2!2!7!} p_9^2 p_{10}^2 (1 - p_9 - p_{10})^7 \\ &= 0,2949 - 0,0113 = \underline{0,2836} \end{aligned}$$

- Die Anfangsverteilung ist  $\vec{p}^T(0) = (\frac{1}{6} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{2})$ . Gesucht ist  $\vec{p}^T(2) = \vec{p}^T(0) \cdot P^2$

$$\vec{p}^T(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

- Wird Zustand 3 im letzten Schritt besucht, gibt es nur eine mögliche Zustandsfolge, 1212...**3**, mit der Wahrscheinlichkeit  $2^{-N}$ . Wird er in einem der anderen  $(N - 1)$  Schritte besucht, ergeben sich zwei mögliche Verläufe, 1212...**3**1212... oder 1212...**3**2121.... Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist jeweils  $2 \cdot 2^{-N}$ .

Insgesamt ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $2^{-N} + (N - 1) \cdot 2 \cdot 2^{-N} = (2N - 1)2^{-N}$ .

- Jeder Zustand wird von jedem anderen aus mit gleicher Wahrscheinlichkeit besucht. Im stationären Fall kann somit kein Zustand wahrscheinlicher sein als ein anderer.

Die gesuchte Verteilung ist  $\vec{p}^T = \left( \frac{1}{M} \ \frac{1}{M} \ \dots \ \frac{1}{M} \right)$ .

## Aufgabe 4

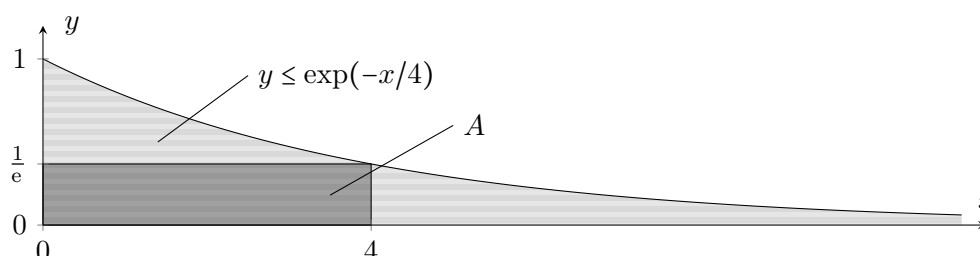
Gegeben sind die positiven Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} y & , \text{ für } y \leq \exp(-x/4) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}.$$

- Skizzieren Sie den von Null verschiedenen Definitionsbereich von  $f(x, y)$  in der  $XY$ -Ebene und prüfen Sie auf Unabhängigkeit der Zufallsvariablen.
- Berechnen Sie die Kovarianz von  $X$  und  $Y$ .
- Zeigen Sie, dass  $X$  und  $Y$  unter der Bedingung  $Y < 1/e$  und  $X < 4$  unabhängig sind. Berechnen Sie dazu die zugehörige bedingte Dichte und tragen Sie den von Null verschiedenen Definitionsbereich in die Skizze aus Aufgabenteil a) ein.

## Lösung

- a) Da  $f(x, y)$  keinen rechteckförmigen Träger besitzt, müssen  $X$  und  $Y$  abhängig sein:



- b) Es gilt  $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  und  $E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dy dx$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x \int_0^{e^{-x/4}} y dy dx = \int_0^{\infty} x \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{e^{-x/4}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-x/2} dx \stackrel{\text{(C.5)}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1!}{(\frac{1}{2})^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} \int_0^{e^{-x/4}} y^2 dy dx = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{e^{-x/4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-3x/4} dx = \frac{1}{3} \left[ -\frac{4}{3} e^{-3x/4} \right]_{x=0}^{\infty} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^{\infty} x \int_0^{e^{-x/4}} y^2 dy dx = \int_0^{\infty} x \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{e^{-x/4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x e^{-3x/4} dx \stackrel{\text{(C.5)}}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1!}{(\frac{3}{4})^2} = \frac{16}{27} \end{aligned}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{16}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8}{27} \approx -0,296$$

- c) Sei  $A = \{X < 4 \wedge Y < \frac{1}{e}\}$  mit  $P(A) = \int_0^4 \int_0^{1/e} y dy dx = 4 \cdot \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{1/e} = 2e^{-2}$ . Dann ist für  $x < 4 \wedge y < \frac{1}{e}$  (siehe Abbildung oben) die bedingten Dichte

$$f(x, y | A) = \frac{y}{P(A)} = \frac{y}{2e^{-2}} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{f(x|A)} \cdot \underbrace{2e^2 y}_{f(y|A)}$$

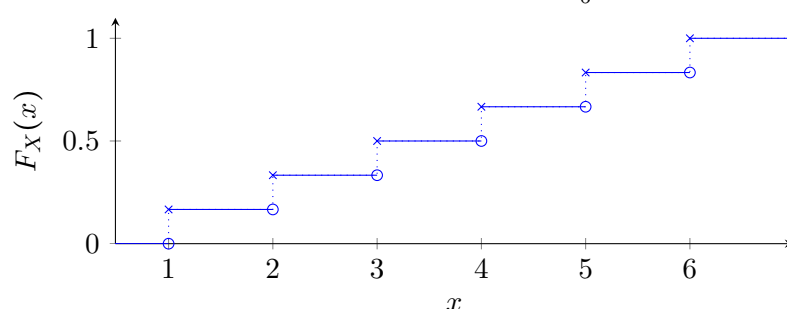
## Aufgabe 5

Es werden vier faire unabhängige Würfel geworfen. Die angezeigten Augenzahlen werden von links nach rechts aufsteigend geordnet und bilden die Ziffern einer vierstelligen Zahl.

- Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion eines Würfels.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die erste und die letzte Ziffer identisch?
- Bestimmen Sie  $\Omega$  als Ergebnisraum der gebildeten Zahlen und geben Sie  $|\Omega|$  an.
- Handelt es sich um ein Laplace-Experiment? Begründung!
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die entstehende Zahl kleiner als 3000?

## Lösung

- a) Die angezeigte Augenzahl sei  $X$ .  $P(X = x) = \frac{1}{6}$  für  $x \in \{1, \dots, 6\}$  und somit:



- b) Sind die erste und letzte Ziffer identisch, müssen alle Ziffern identisch sein. Dabei sind alle sechs Augenzahlen möglich:

$$P(\{\text{„alle Ziffern identisch“}\}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{216} \approx 0,00463$$

- c) Es werden  $K = 4$  aus  $N = 6$  Elementen ausgewählt, wobei Wiederholungen erlaubt sind. Die Reihenfolge der Elemente ist unerheblich, da anschließend sortiert wird:

$$\Omega = \tilde{C}_N^{(K)} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4\} \quad \text{mit} \quad z_i \in \{1, \dots, 6\}$$

$$|\Omega| = |\tilde{C}_N^{(K)}| = \binom{N+K-1}{K} = \binom{9}{4} = \underline{126}$$

- d) Nein, da z.B.  $P(1111) = \frac{1}{6^4}$  und  $P(1112) = \frac{4}{6^4}$  verschieden sind. Zur Berechnung: Von den  $|\tilde{V}_6^{(4)}| = 6^4$  gleichwahrscheinlich fallenden Augenzahlen (m.B.d.R.) ergeben je  $|\Pi_6^{(n_1, \dots, n_6)}|$  dieselbe Zahl ( $n_j$  ist die Anzahl der Würfel, die die Augenzahl  $j$  zeigen).

- e) Ereignis  $A = \{\text{„Zahl} < 3000\text{“}\} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \Omega : z_1 < 3\}$ . Damit muss mindestens eine Augenzahl aus  $\{1, 2\}$  sein. Alle Würfe, bei denen nicht ausschließlich Augenzahlen aus  $\{3, 4, 5, 6\}$  fallen, sind in  $A$ :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\min\{z_1, z_2, z_3, z_4\} < 3) = 1 - P(\min\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \geq 3) \\ &= 1 - P(z_1 \geq 3 \wedge z_2 \geq 3 \wedge z_3 \geq 3 \wedge z_4 \geq 3) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{65}{81} \approx 0,8025 \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

Eine Reparaturwerkstatt hat regelmäßigen Bedarf an Ersatzteilen eines bestimmten Typs. Anstatt diese für jeden Auftrag einzeln zu bestellen, werden bis zu vier Teile in einem Lager vorgehalten. Am Ende jeder Woche wird der Lagerbestand auf vier Teile aufgefüllt. Untersucht werden soll die Strategie, Reparaturaufträge abzulehnen, wenn das Lager leer ist.

Der Bedarf an diesen Teilen folge einem Poisson-Prozess  $X(t)$  mit dem Parameter  $\lambda = \frac{3}{7}$  pro Tag.

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass zwischen zwei Bestückungen des Lagers (7 Tage) Reparaturaufträge abgelehnt werden müssen.
- Direkt vor der erwarteten Befüllung des Lagers wird das letzte Teil aus dem Lager genommen. Der Lieferant verspätet sich.  
Wie viele Stunden darf er maximal zu spät kommen, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% kein weiteres Ersatzteil benötigt wird?
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in 4 Wochen genau 16 Aufträge bearbeitet werden und keiner abgelehnt werden muss.
- Innerhalb von 14 Tagen nach einer Befüllung des Lagers wurden genau 6 Reparaturaufträge bearbeitet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dabei kein Auftrag abgelehnt?

## Lösung

- Mit  $t$  in Tagen und  $P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$  bei  $X(0) = 0$  gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t+7) > k+4 \mid X(t) = k) &= 1 - P(X(7) \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \\ &= 1 - \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}\right) e^{-3} = \underline{0,1847} \end{aligned}$$

- Die Zeit  $T$  zwischen zwei Aufträgen folgt einer Exponentialverteilung. Gesucht ist  $t > 0$  in

$$P(T > t) = 1 - F_T(t) = \exp(-\lambda t) \stackrel{!}{\geq} 0,9 \quad \Rightarrow \quad t \leq t_{\max} = -\ln(0,9)\lambda^{-1} = 0,2458$$

Er darf sich maximal  $24 \cdot t_{\max} \approx \underline{5,9 \text{ Stunden}}$  verspäten.

- Da pro Woche maximal 4 Aufträge ausgeführt werden können, muss dies vier Wochen hintereinander erfolgen um 16 Aufträge in einem Monat zu erreichen.

$$\begin{aligned} P(X(7) = 4 \wedge X(14) = 8 \wedge X(21) = 12 \wedge X(28) = 16) \\ = \left[ P(X(7) = 4) \right]^4 = \left[ \frac{81}{24} e^{-3} \right]^4 = \underline{0,0007972} \end{aligned}$$

- Für  $t_2 > t_1$  und  $k \leq n$  ist  $P(X(t_1) = k \mid X(t_2) = N) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k}$  mit  $p = t_1/t_2$ . Kritisch ist hier wie viele der 6 Aufträge in der ersten Woche bearbeitet werden:

$$P(X(7) = k \mid X(14) = 6) = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{7}{14}\right)^k \left(1 - \frac{7}{14}\right)^{6-k} = \frac{1}{64} \binom{6}{k}$$

Weiterhin sind maximal vier Aufträge pro Woche möglich. Um 6 Aufträge in zwei Wochen zu erreichen, müssen mindestens zwei in der ersten Woche liegen:

$$P(2 \leq X(7) \leq 4 \mid X(14) = 6) = \frac{1}{64} \left[ \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} \right] = \frac{25}{32} \approx \underline{0,7813}$$

Alternativ kann auch mit  $t$  in Wochen und  $\lambda = 3$  gerechnet werden.

# Formelsammlung und Tabellen

## A Tabelle der Standardnormalverteilung

| $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,00 | 0,500000  | 0,80 | 0,788145  | 1,60 | 0,945201  | 2,40 | 0,991802  | 3,20 | 0,999313  |
| 0,02 | 0,507978  | 0,82 | 0,793892  | 1,62 | 0,947384  | 2,42 | 0,992240  | 3,22 | 0,999359  |
| 0,04 | 0,515953  | 0,84 | 0,799546  | 1,64 | 0,949497  | 2,44 | 0,992656  | 3,24 | 0,999402  |
| 0,06 | 0,523922  | 0,86 | 0,805105  | 1,66 | 0,951543  | 2,46 | 0,993053  | 3,26 | 0,999443  |
| 0,08 | 0,531881  | 0,88 | 0,810570  | 1,68 | 0,953521  | 2,48 | 0,993431  | 3,28 | 0,999481  |
| 0,10 | 0,539828  | 0,90 | 0,815940  | 1,70 | 0,955435  | 2,50 | 0,993790  | 3,30 | 0,999517  |
| 0,12 | 0,547758  | 0,92 | 0,821214  | 1,72 | 0,957284  | 2,52 | 0,994132  | 3,32 | 0,999550  |
| 0,14 | 0,555670  | 0,94 | 0,826391  | 1,74 | 0,959070  | 2,54 | 0,994457  | 3,34 | 0,999581  |
| 0,16 | 0,563559  | 0,96 | 0,831472  | 1,76 | 0,960796  | 2,56 | 0,994766  | 3,36 | 0,999610  |
| 0,18 | 0,571424  | 0,98 | 0,836457  | 1,78 | 0,962462  | 2,58 | 0,995060  | 3,38 | 0,999638  |
| 0,20 | 0,579260  | 1,00 | 0,841345  | 1,80 | 0,964070  | 2,60 | 0,995339  | 3,40 | 0,999663  |
| 0,22 | 0,587064  | 1,02 | 0,846136  | 1,82 | 0,965621  | 2,62 | 0,995604  | 3,42 | 0,999687  |
| 0,24 | 0,594835  | 1,04 | 0,850830  | 1,84 | 0,967116  | 2,64 | 0,995855  | 3,44 | 0,999709  |
| 0,26 | 0,602568  | 1,06 | 0,855428  | 1,86 | 0,968557  | 2,66 | 0,996093  | 3,46 | 0,999730  |
| 0,28 | 0,610261  | 1,08 | 0,859929  | 1,88 | 0,969946  | 2,68 | 0,996319  | 3,48 | 0,999749  |
| 0,30 | 0,617911  | 1,10 | 0,864334  | 1,90 | 0,971283  | 2,70 | 0,996533  | 3,50 | 0,999767  |
| 0,32 | 0,625516  | 1,12 | 0,868643  | 1,92 | 0,972571  | 2,72 | 0,996736  | 3,52 | 0,999784  |
| 0,34 | 0,633072  | 1,14 | 0,872857  | 1,94 | 0,973810  | 2,74 | 0,996928  | 3,54 | 0,999800  |
| 0,36 | 0,640576  | 1,16 | 0,876976  | 1,96 | 0,975002  | 2,76 | 0,997110  | 3,56 | 0,999815  |
| 0,38 | 0,648027  | 1,18 | 0,881000  | 1,98 | 0,976148  | 2,78 | 0,997282  | 3,58 | 0,999828  |
| 0,40 | 0,655422  | 1,20 | 0,884930  | 2,00 | 0,977250  | 2,80 | 0,997445  | 3,60 | 0,999841  |
| 0,42 | 0,662757  | 1,22 | 0,888768  | 2,02 | 0,978308  | 2,82 | 0,997599  | 3,62 | 0,999853  |
| 0,44 | 0,670031  | 1,24 | 0,892512  | 2,04 | 0,979325  | 2,84 | 0,997744  | 3,64 | 0,999864  |
| 0,46 | 0,677242  | 1,26 | 0,896165  | 2,06 | 0,980301  | 2,86 | 0,997882  | 3,66 | 0,999874  |
| 0,48 | 0,684386  | 1,28 | 0,899727  | 2,08 | 0,981237  | 2,88 | 0,998012  | 3,68 | 0,999883  |
| 0,50 | 0,691463  | 1,30 | 0,903200  | 2,10 | 0,982136  | 2,90 | 0,998134  | 3,70 | 0,999892  |
| 0,52 | 0,698468  | 1,32 | 0,906582  | 2,12 | 0,982997  | 2,92 | 0,998250  | 3,72 | 0,999900  |
| 0,54 | 0,705401  | 1,34 | 0,909877  | 2,14 | 0,983823  | 2,94 | 0,998359  | 3,74 | 0,999908  |
| 0,56 | 0,712260  | 1,36 | 0,913085  | 2,16 | 0,984614  | 2,96 | 0,998462  | 3,76 | 0,999915  |
| 0,58 | 0,719043  | 1,38 | 0,916207  | 2,18 | 0,985371  | 2,98 | 0,998559  | 3,78 | 0,999922  |
| 0,60 | 0,725747  | 1,40 | 0,919243  | 2,20 | 0,986097  | 3,00 | 0,998650  | 3,80 | 0,999928  |
| 0,62 | 0,732371  | 1,42 | 0,922196  | 2,22 | 0,986791  | 3,02 | 0,998736  | 3,82 | 0,999933  |
| 0,64 | 0,738914  | 1,44 | 0,925066  | 2,24 | 0,987455  | 3,04 | 0,998817  | 3,84 | 0,999938  |
| 0,66 | 0,745373  | 1,46 | 0,927855  | 2,26 | 0,988089  | 3,06 | 0,998893  | 3,86 | 0,999943  |
| 0,68 | 0,751748  | 1,48 | 0,930563  | 2,28 | 0,988696  | 3,08 | 0,998965  | 3,88 | 0,999948  |
| 0,70 | 0,758036  | 1,50 | 0,933193  | 2,30 | 0,989276  | 3,10 | 0,999032  | 3,90 | 0,999952  |
| 0,72 | 0,764238  | 1,52 | 0,935745  | 2,32 | 0,989830  | 3,12 | 0,999096  | 3,92 | 0,999956  |
| 0,74 | 0,770350  | 1,54 | 0,938220  | 2,34 | 0,990358  | 3,14 | 0,999155  | 3,94 | 0,999959  |
| 0,76 | 0,776373  | 1,56 | 0,940620  | 2,36 | 0,990862  | 3,16 | 0,999211  | 3,96 | 0,999963  |
| 0,78 | 0,782305  | 1,58 | 0,942947  | 2,38 | 0,991344  | 3,18 | 0,999264  | 3,98 | 0,999966  |



## B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

## C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.4})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.6})$$

## D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{D.5})$$