

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
23.03.2018

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg** und die **gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **27.04.2018** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG). Die **Klausureinsicht** ist am **03.05.2018** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). . Es wird nach der letzten Ziffer der Matrikelnummer unterteilt: **0,1,2,3** von **12:00 bis 14:00 Uhr**, **4,5,6** von **14:00 bis 15:30 Uhr** und **7,8,9** von **15:30 bis 17:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **08.05.2018** statt.

Aufgabe 1

Es gibt braune und weiße Eier. Der Kauf eines Eis wird im Folgenden als Zufallsexperiment betrachtet, bei dem Eier unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $7/10$ braun sind.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von sechs gekauften Eiern genau drei braun?
- b) Ein gekaufter Karton mit zwölf Eiern erweist sich auf der linken Hälfte als komplett weiß, auf der rechten als komplett braun. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?
- c) Zu Ostern kommt der Zufallsvariable X_{12} , der Anzahl weißer Eier in einem Karton mit zwölf Eiern, eine besondere Bedeutung zu. Berechnen Sie die mittlere Anzahl weißer Eier pro Karton.
- d) Wie viele Eier muss man kaufen, um mit mindestens der Wahrscheinlichkeit p_c zumindest ein weißes Ei zu haben?
- e) Wie viele Eier muss man kaufen, um $p_c = 0,3$ zu erreichen?
- f) Auf einem großen Bauernhof werden 15 500 weiße und 34 500 braune Eier gezählt. Ist das plausibel, das heißt, ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis mindestens 1 ‰?

Lösung

- a) Binomialverteilung

$$P(X_6 = 3) = \binom{6}{3} p_w^3 (1 - p_w)^{6-3} = 4 \cdot 5 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^3 = 18,522 \%$$

- b) **Lösungsweg 1:** $P = P(\text{sechs von zwölf weiß}) \cdot P(\text{linke Hälfte weiß})$

$$P(\text{sechs von zwölf weiß}) = \binom{12}{6} 0,7^6 0,3^6 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Binomialverteilung} \\ \text{Ziehe sechs Orte aus zwölf möglichen Orten} \end{array} \right. \quad P(\text{linke Hälfte weiß}) = \frac{1}{\binom{12}{6}}$$

Lösungsweg 2: Erst ein Sechsertupel weiß, dann ein Sechsertupel braun „ziehen“

$$P = 0,7^6 0,3^6 \approx 8,577 \times 10^{-5}$$

- c) Erwartungswert der Weißheit von 12 unabhängigen Eiern: $E(X_{12}) = 12 \cdot 0,3 = 3,6$
- d) N sei die Anzahl der mindestens benötigten Eier:

$$P(X_N \geq 1) = 1 - P(X_N = 0) = 1 - \binom{N}{0} 0,3^0 0,7^N = 1 - 0,7^N$$

Aus dem Ansatz $1 - 0,7^N \stackrel{!}{\geq} p_c$ folgt durch Umstellen:

$$N \geq \frac{\log(1 - p_c)}{\log 0,7}$$

- e) **Lösungsweg 1: Einsetzen**

$$N \geq \frac{\log(1 - p_c)}{\log 0,7} = \frac{\log 0,7}{\log 0,7} = 1$$

Lösungsweg 2: Genaues Hinschauen

$$p_c = p_w \implies N = 1$$

- f) Insgesamt $N = 34500 + 15500 = 50000$ Eier. Das sind hinreichend viele für CLT / Satz von De Moivre-Laplace. Als erstes stellt man $P_{\text{weniger}} = P(X_{50000} < 15500)$ auf, danach überprüft man, ob $1 - P_{\text{weniger}} \geq 1\%$ ist:

$$\begin{aligned} E(X_N) &= Np_w = 50000 \cdot 0,3 = 15000 \\ D^2(X_N) &= Np_w(1 - p_w) = 50000 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 10500 \\ \implies D(X_N) &= \sqrt{D^2(X_N)} \approx 102,5 \end{aligned}$$

Laut Moivre-Laplace folgt, dass die Verteilung sich der Normalverteilung nähert:

$$\begin{aligned} P_{\text{weniger}} = P(X_N < 15500) &\approx \Phi\left(\frac{15499 - E(X_N)}{D(X_N)}\right) && \text{de Moivre-Laplace} \\ &\approx \Phi(4,87) \end{aligned}$$

Da $\Phi(4,87) > \Phi(3,98) \approx 99,9966\%$ ist $1 - P_{\text{weniger}} \ll 1\%$. Damit ist diese Eiverteilung unplausibel.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit den Dichten:

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

- Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} .
- Berechnen Sie die Dichte von X^2 . Welche Verteilung besitzt X^2 ?

Im Folgenden sei $\tilde{X}$ eine von Y unabhängige Zufallsvariable, die auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Es wird die Zufallsvariable $Z := \tilde{X} + Y$ betrachtet.

- Berechnen Sie die Dichte von Z .
- Skizzieren Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion von Z . Achten Sie auf die Achsenbeschriftung.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Z)$.

Lösung

- Da die ZV unabhängig sind, sind sie auch unkorreliert. Damit ist $\rho_{XY} = 0$.
- Die ZV X^2 besitzt eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$, denn:

$$f_{X^2}(\xi) = \frac{d}{d\xi} P(X^2 \leq \xi) = \frac{d}{d\xi} P(X \leq \sqrt{\xi}) = f_X(\sqrt{\xi}) \cdot \frac{1}{2} \xi^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

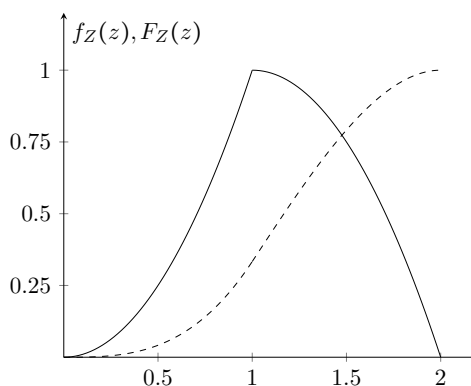
- Die Dichte von Z ergibt sich über die Faltung:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{X}}(z - \zeta) f_Y(\zeta) d\zeta = \int_{\max\{z-1, 0\}}^{\min\{z, 1\}} 1 \cdot 2\zeta d\zeta$$

Einsetzen liefert:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z 2\zeta d\zeta = z^2, & 0 \leq z \leq 1 \\ \int_{z-1}^1 2\zeta d\zeta = 2z - z^2, & 1 < z \leq 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Dichte und die Verteilungsfunktion sind in der folgenden Graphik dargestellt.



- $\tilde{X}$ besitzt eine Gleichverteilung auf $[0, 1]$; es folgt $E(\tilde{X}) = \frac{1}{2}$ und somit:

$$E(Z) = E(\tilde{X}) + E(Y) = \frac{1}{2} + \int_0^1 2y^2 dy = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

Aufgabe 3

Es sei $X_1, X_2, \dots = (X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, wobei jedes X_n eine Zweipunktverteilung auf $\{-1, +1\}$ mit $P(X_n = -1) = P(X_n = +1)$ besitzt. Deren Mittelung über N Werte wird beschrieben durch die Größe

$$S_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n.$$

- Berechnen Sie $E(S_N)$ und $D^2(S_N)$.
- Bestimmen Sie $P(S_N = 0)$.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße S_N für *große* N einen Wert in $[-\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}]$ annimmt?

Nun wird die Folge $(S_N)_{N \geq 1}$ als stochastischer Prozess interpretiert.

- Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion des Prozesses $(S_N)_{N \geq 1}$. Ist der Prozess stationär?

Lösung

- Man rechnet aufgrund Unabhängigkeit und identischer Verteilung:

$$\begin{aligned} E(S_N) &= E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(X_n) = 0 \\ D^2(S_N) &= D^2\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N D^2(X_n) = \frac{1}{N} \cdot 1 \end{aligned}$$

1. Fall: Ist N ungerade, so kann die Summe nicht zu Null werden. Es folgt $P(S_N = 0) = 0$.
2. Fall: Ist N gerade, so wird die Summe zu Null, wenn genau $N/2$ -mal -1 bzw. $+1$ auftritt. Es folgt die Wahrscheinlichkeit $P(S_N = 0) = \binom{N}{N/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$. Insgesamt:

$$P(S_N = 0) = \begin{cases} \binom{N}{N/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N, & N \text{ gerade} \\ 0, & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Mit dem ZGWS folgt:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{\sqrt{N}} < S_N \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\right) &= P\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{N}} - E(S_N)}{\sqrt{D^2(S_N)}} < \frac{S_N - E(S_N)}{\sqrt{D^2(S_N)}} \leq \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} - E(S_N)}{\sqrt{D^2(S_N)}}\right) \\ &= P\left(-1 < \sqrt{N} \cdot S_N \leq 1\right) \approx \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,841 - 1 = 0,682 \end{aligned}$$

- Durch Rechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_{SS}(N, M) &= E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M X_m\right) = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M E(X_n X_m) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{\min\{N, M\}} E(X_n^2) = \frac{\min\{N, M\}}{NM} \end{aligned}$$

Da die AKF nicht nur von der Differenz der Zeitpunkte abhängt, ist der Prozess nicht stationär.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine Verbundverteilung $f_{X,Y}(x,y)$ als Gleichverteilung auf

$$G = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- Begründen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.
- Bestimmen Sie die Randdichte $f_X(x)$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. Begründen Sie anschaulich Ihr Ergebnis.
- Die Punkte sollen im Folgenden in Polarkoordinaten (Abstand r , Winkel zur x-Achse ϕ) beschrieben werden. Leiten Sie die Dichte $f_{R,\Phi}(r,\phi)$ her.
- Welchen *mittleren Abstand* zum Ursprung besitzt ein gemäß $f_{X,Y}(x,y)$ auf G zufällig gewählter Punkt?

Lösung

- Da der Definitionsbereich der Dichten nicht rechteckig ist, sind diese nicht unabhängig. Es ist beispielsweise $f_{XY}(0,8,0,8) = 0 \neq f_X(0,8) \cdot f_Y(0,8)$.
- Die Randdichte ergibt sich durch Integration der gemeinsamen Dichte zu:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der Erwartungswert bzgl. X wird durch Integration bestimmt und lautet:

$$E(X) = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = 0,$$

da die Funktion im Integral ungerade und der Integrationsbereich symmetrisch ist.

Die Punkte werden gleichverteilt auf G erzeugt. Der mittlere Wert sollte damit dem Schwerpunkt des Gebiets G entsprechen, was dem Ursprung entspricht.

- Durch Anwendung des Transformationssatzes für Dichten folgt aus

$$\begin{pmatrix} R \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \arctan(\frac{Y}{X}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\Phi) \\ R \sin(\Phi) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Determinante:

$$|\mathcal{J}| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix} \right| = r$$

Daraus ergibt sich

$$f_{R,\Phi}(r,\phi) = r \cdot f_{X,Y}(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \begin{cases} \frac{r}{\pi}, & 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Aus der Verbunddichte folgt die Randdichte

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{\pi} d\phi = 2r, \quad 0 \leq r \leq 1$$

und damit der mittlere Abstand (Erwartungswert):

$$E(R) = \int_0^1 2r^2 dr = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 5

In einer Galerie werden 12 Bilder ausgestellt, von denen 10 echt und 2 Fälschungen sind. Ein anwesender Gutachter kann die Bilder begutachten und erstellt mit Wahrscheinlichkeit $9/10$ eine korrekte Aussage zur Echtheit eines Bildes.

Ein Interessent wählt eines der Bilder und lässt es durch den Gutachter prüfen. Wird das Bild als echt bewertet, so kauft es der Interessent. Wird das Bild als unecht bewertet, so kauft der Interessent ohne weitere Prüfung eines der *anderen* Bilder.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit bewertet der Gutachter das zuerst gewählte Bild als echt?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste Bild echt, falls es der Gutachter für echt hält?
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Interessent als erstes ein echtes Bild auswählt, dieses aufgrund eines falschen Gutachtens fälschlicherweise zurücklegt und als zweites ein ebenfalls echtes Bild auswählt.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Interessent ein echtes Bild kauft?
- Der Käufer bezahlt bei Kauf 10 000 Euro. Bei Kauf eines echten Bildes erhält er genau diesen Gegenwert. Wird eine Fälschung gekauft, so verliert der Käufer sein gesamtes Kapital. Ein Gutachten kostet den Käufer y Euro. Wie viel darf die Erstellung eines Gutachtens höchstens kosten, damit der Käufer durch das Gutachten im Mittel profitiert?

Hinweis: Verwenden Sie für Ihre Lösung die folgenden Ereignisse:

$$E_i = \{i\text{-tes Bild ist echt}\}$$

$$G = \{\text{Gutachter bewertet das 1. Bild als echt}\}$$

Lösung

- a) Aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P(G) = P(G|E_1)P(E_1) + P(G|\overline{E_1})P(\overline{E_1}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{12} = \frac{92}{120} = \frac{23}{30} \approx 0,767$$

- b) Mittels des Satzes von Bayes ergibt sich:

$$P(E_1|G) = \frac{P(G|E_1)P(E_1)}{P(G)} = \frac{\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{12}}{\frac{92}{120}} = \frac{90}{92} \approx 0,978$$

- c) Gesucht ist folgende Wahrscheinlichkeit: (ggf. Baumdiagramm erstellen)

$$P(E_1\overline{G}E_2) = P(E_1)P(\overline{G}|E_1)P(E_2|E_1\overline{G}) = \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{132} \approx 0,068$$

- d) Man rechnet: (ggf. Baumdiagramm erstellen)

$$\begin{aligned} P(\text{echt}) &= P(E_1G) + P(E_1\overline{G}E_2) + P(\overline{E_1}\overline{G}E_2) \\ &= \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{10} + \frac{10}{12} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{90 \cdot 11 + 90 + 180}{1320} \\ &= \frac{21}{22} \approx 0,955 \end{aligned}$$

- e) Man berechnet die mittleren Kosten für beide Fälle:

$$E(\text{Kosten ohne Gutachten}) = 10\,000 \cdot \frac{2}{12} + 0 \cdot \frac{10}{12}$$

$$E(\text{Kosten mit Gutachten}) = 10\,000 \cdot (1 - P(\text{echt})) + 0 \cdot P(\text{echt}) + y = 10\,000 \cdot \frac{1}{22} + y$$

Durch Vergleich folgt: $y \stackrel{!}{\leq} 10\,000 \cdot (2/12 - 1/22) \approx 1\,212,12 \text{ Euro.}$

Aufgabe 6

Beim Spiel „Stille Post“ wird eine Nachricht aus $\{ja, jein, nein\}$ zwischen Personen durch Flüstern weitergegeben. Hierdurch entstehen Fehler, wobei

- *ja* mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in *nein* und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in *jein* verfälscht wird,
- *nein* mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in *ja* und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in *jein* verfälscht wird und
- *jein* mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in *nein* und mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 in *ja* verfälscht wird.

Das Spiel wird durch eine homogene Markoffkette $X(n)$ mit der Zustandsmenge $Z = \{ja = 1, jein = 2, nein = 3\}$ beschrieben, wobei $X(n)$ die beim n -ten Empfänger ankommende Nachricht beschreibt. Der Anfangszustand ist $X(0) = ja$.

- Stellen Sie die dazugehörige Übergangsmatrix sowie den Übergangsgraphen auf.
- Welche zwei Eigenschaften besitzt eine stochastische Matrix?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zweite Empfänger die Nachricht „jein“ erhält?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den folgenden Zustandsverlauf?

$$P(X(0) = 1, X(2) = 1, X(3) = 1)$$

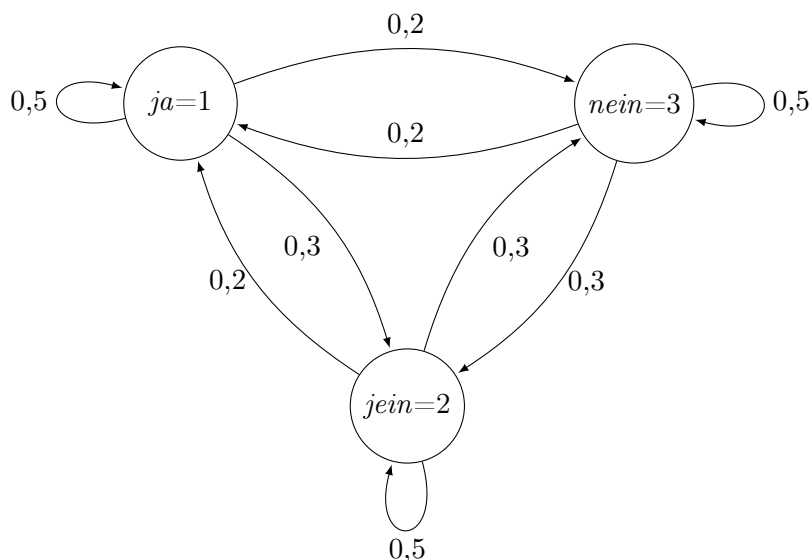
- Prüfen Sie, ob die Markoffkette eine stationäre Verteilung besitzt und geben Sie diese im Falle der Existenz an.

Lösung

- Die Übergangsmatrix folgt aus der Aufgabenstellung zu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Der Zustandsgraph ergibt sich zu:



- b) Die Einträge der Matrix sind alle positiv. Zudem sind alle Zeilensummen gleich 1.
- c) Für die Übergangsmatrix bei zwei Schritten berechnet man:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,36 & 0,29 \\ 0,26 & 0,4 & 0,34 \\ 0,26 & 0,36 & 0,38 \end{pmatrix}$$

Somit folgt $\mathbf{p}^T(2) = \mathbf{p}^T(0)\mathbf{P}^2 = (0,35, 0,36, 0,29)$ und daraus $P(X(2) = \text{jein}) = 0,36$.

- d) Aufgrund der Markoff-Eigenschaft vereinfacht sich die gesuchte Größe zu:

$$\begin{aligned} P(X(0) = 1, X(2) = 1, X(3) = 1) \\ &= P(X(0) = 1) \cdot P(X(2) = 1 | X(0) = 1) \cdot P(X(3) = 1 | X(2) = 1, X(0) = 1) \\ &= P(X(0) = 1) \cdot P(X(2) = 1 | X(0) = 1) \cdot P(X(3) = 1 | X(2) = 1) \\ &= 1 \cdot 0,35 \cdot 0,5 = 0,175 \end{aligned}$$

- e) Für eine stationäre Lösung muss $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{P}$ bzw. $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}$ für einen Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{p}$ sein. Gleichungslösung liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{21}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{19}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & -\frac{19}{2} & \frac{21}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{19}{2} & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{16}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{21}{19} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Lösungsvektor hat damit die Form $\mathbf{p} = (\frac{16}{19}a, \frac{21}{19}a, a)$. Aus der Forderung $\sum_i p_i = 1$ folgt $\mathbf{p} = (\frac{16}{56}, \frac{21}{56}, \frac{19}{56})$. Somit existiert eine stationäre Verteilung.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.4})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.6})$$