

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
28.02.2019

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **04.04.2019** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** ist am **17.04.2019** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). Es wird nach der letzten Ziffer der Matrikelnummer unterteilt: **0,1,2,3** von **12:00 bis 14:00 Uhr**, **4,5,6** von **14:00 bis 15:30 Uhr** und **7,8,9** von **15:30 bis 17:00 Uhr**. Die **mündliche Nachprüfung** findet am **23.04.2019** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1

Sie generieren 8 faire unabhängige Bit $B_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, \dots, 7$, bilden daraus ein Binärwort $(B_7, \dots, B_0)$ und erzeugen gemäß $Z = B_7 \cdot 2^7 + B_6 \cdot 2^6 + \dots + B_1 \cdot 2 + B_0$ eine positive Zahl Z .

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl Z größer gleich 64 *und* gerade ist. Begründen Sie Ihre Rechenschritte.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig erzeugtes Binärwort an mindestens 5 Stellen eine „1“ besitzt.

Im Rahmen einer Nachrichtenübertragung ergänzen Sie Ihr Binärwort um ein Prüfbit, so dass das entstehende neunstellige Wort insgesamt gerade Parität, d.h. eine gerade Anzahl an 1, besitzt. Jedes Bit wird unabhängig von den anderen Bit mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit verfälscht.

- Wie viele verfälschte neunstellige Binärwörter werden trotz Prüfbit *nicht* als falsch erkannt?

Zur Effizienzsteigerung auf dem Übertragungskanal verwenden Sie im Folgenden Binärwörter der Länge 2000 Bit. Jedes Bit wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p_e = 1/10$ verfälscht. Im Folgenden bezeichnet F die Anzahl der Fehler in einem Bitwort der Länge 2000.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl F der verfälschten Bit zwischen 180 und 220 (Grenzen inklusive!) liegt.

Lösung

- Die entstehende Zahl ist gerade, falls die letzte Binärstelle gleich 0 ist. Dies ist bei fairen Bits genau mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der Fall.

Die entstehende Zahl ist größer gleich 64, falls mindestens eine der ersten beiden Binärstellen gleich 1 ist. Dies ist das Komplement davon, dass beide gleich 0 sind, und geschieht bei fairen Bits mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Da die beteiligten Bit unabhängig sind, sind die Bedingungen unabhängig und die berechneten Wahrscheinlichkeiten können multipliziert werden. Es folgt:

$$P(Z \text{ gerade}, Z \geq 64) = P(Z \text{ gerade}) \cdot P(Z \geq 64) = \frac{3}{8}$$

- Man rechnet:

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 5 „1“}) &= P(\text{höchstens 3 „0“}) \\ &= \sum_{i=0}^3 \binom{8}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{8-i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{256} \left(\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} \right) \\ &= \frac{93}{256} \approx 0.3633 \end{aligned}$$

- Der Fehler wird nicht bemerkt, wenn eine gerade Anzahl von Bits verfälscht sind. Die Anzahl dieser Fehlermuster lautet:

$$\begin{aligned} |\text{Anzahl Fehler} \in \{2, 4, 6, 8\}| &= \sum_{n=1}^4 \binom{9}{2n} \\ &= \binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \binom{9}{6} + \binom{9}{8} \\ &= 255 \end{aligned}$$

- d) Bezeichnet F die Anzahl der Fehler, so ist F binomialverteilt mit $N = 2000$ und $p = 1/10$. Wegen $Np(1-p) = 200 \cdot 0.9 = 180 > 9$ sind die Bedingung des Satzes von de Moivre Laplace erfüllt. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 P(180 \leq F \leq 220) &= P(179 < F \leq 220) \\
 &= P\left(\frac{179 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} < \frac{F - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{220 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) \\
 &\approx \Phi\left(\frac{220 - 2000 \cdot 0.1}{\sqrt{2000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{179 - 2000 \cdot 0.1}{\sqrt{2000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) \\
 &\approx \Phi(1.491) - \Phi(-1.565) = \Phi(1.491) - (1 - \Phi(1.565)) \\
 &\approx 0.873
 \end{aligned}$$

Hinweis: Ohne Verwendung des diskreten Gegenereignisses folgt:

$$\begin{aligned}
 P(180 \leq F \leq 220) &\approx \Phi\left(\frac{220 - 2000 \cdot 0.1}{\sqrt{2000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) - \Phi\left(\frac{180 - 2000 \cdot 0.1}{\sqrt{2000 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) \\
 &\approx \Phi(1.491) - \Phi(-1.491) = \Phi(1.491) - (1 - \Phi(1.491)) \\
 &\approx 0.864
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

In einer Abwandlung des Brettspiels „Risiko“ würfelt ein Spieler S_1 mit drei, ein anderer Spieler S_2 mit zwei Würfeln. Alle Würfel werden als unabhängig und fair angenommen. Für jeden Spieler zählt anschließend seine *höchste Augenzahl*, welche für Spieler S_1 bzw. S_2 im Folgenden als X bzw. Y bezeichnet werden soll.

- a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen $F_X(n)$, $F_Y(n)$ der höchsten Würfe beider Spieler.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert von Y .

Der Spieler mit der größeren Augenzahl gewinnt; bei Gleichheit gewinnt Spieler S_2 .

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler S_2 , wenn sein höchster Wurf eine 3 ist?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler S_2 ?

Lösung

- a) Man bezeichne die Würfel für Spieler S_1 mit X_1, X_2, X_3 . Dann folgt für das interessierende Würfelergbnis $X := \max\{X_1, X_2, X_3\}$ die Verteilungsfunktion für $1 \leq n \leq 6$:

$$\begin{aligned} F_X(n) &= P(X \leq n) = P(\max\{X_1, X_2, X_3\} \leq n) \\ &= P(X_1 \leq n, X_2 \leq n, X_3 \leq n) \\ &= P(X_1 \leq n)P(X_2 \leq n)P(X_3 \leq n) = \frac{n^3}{6^3} \end{aligned}$$

Zudem ist $F_X(n) = 0$ für $n \leq 0$ und $F_X(n) = 1$ für $n \geq 7$

Analog folgt für Spieler S_2 und $Y := \max\{Y_1, Y_2\}$ für $1 \leq n \leq 6$:

$$F_Y(n) = \frac{n^2}{6^2}$$

Zudem ist $F_Y(n) = 0$ für $n \leq 0$ und $F_Y(n) = 1$ für $n \geq 7$

- b) Für den Erwartungswert berechnet man:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=1}^6 nP(Y = n) = \sum_{n=1}^6 n(F_Y(n) - F_Y(n-1)) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{n=1}^6 n(2n-1) = \frac{1}{36} \sum_{n=1}^6 2n^2 - n \\ &= \frac{1}{36} \left(2 \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) = \frac{161}{36} \approx 4.472 \end{aligned}$$

- c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler S_2 gewinnt, wenn er eine 3 gewürfelt hat, ergibt sich zu:

$$P(S_2 \text{ gewinnt} | Y = 3) = P(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$$

- d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler S_2 gewinnt, ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} P(S_2 \text{ gewinnt}) &= P(Y \geq X) = \sum_{n=1}^6 P(X \leq n)P(Y = n) \\ &= \sum_{n=1}^6 \frac{n^3}{6^3} \left(\frac{n^2}{6^2} - \frac{(n-1)^2}{6^2} \right) = \frac{1}{6^5} \sum_{n=1}^6 n^3(2n-1) \\ &= \frac{4109}{7776} \approx 0.528 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Das monatliche Einkommen X einer Person sei als zufällig modelliert und besitze die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{\alpha+1}}, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

Hierbei sind c und $x_0 > 0, \alpha > 0$ feste Parameter.

- Bestimmen Sie den Parameter c für beliebige aber feste Parameter $\alpha, x_0 > 0$.
- Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion des Einkommens X . (**Hinweis:** Achten Sie auf die Achsenbeschriftung!)

Nun sei der Parameter α zu $\alpha = 2$ gewählt.

- Bestimmen Sie x_0 so, dass das mittlere Einkommen 3000 \$ beträgt.
- Berechnen Sie für $x_0 = 1500$ \$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mehr als 10 000 \$ erhält, falls *bekannt ist*, dass sie mehr als 3000 \$ erhält.

Lösung

- Durch Integration folgt

$$\int_{x_0}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{c}{\alpha} [-x^{-\alpha}]_{x_0}^{\infty} = \frac{c}{\alpha} x_0^{-\alpha}$$

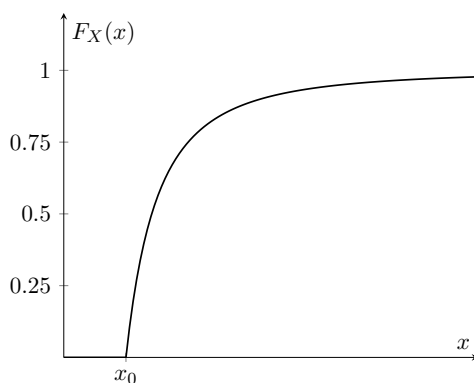
und daraus $c = \alpha \cdot x_0^{\alpha}$. (Die Nicht-Negativität der Dichte ist für $c > 0$ gegeben.)

- Ebenfalls durch Integration ergibt sich für $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{x_0}^x f_X(u) du = \int_{x_0}^x \alpha \cdot x_0^{\alpha} u^{-\alpha-1} du = \alpha \cdot x_0^{\alpha} \left[-\frac{1}{\alpha} u^{-\alpha} \right]_{x_0}^x \\ &= -x_0^{\alpha} (x^{-\alpha} - x_0^{-\alpha}) = 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\alpha}, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$



c) Aus der Berechnung des Erwartungswertes

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{x_0}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} x \cdot \alpha x_0^{\alpha} x^{-\alpha-1} dx \\ &\stackrel{\alpha=2}{=} 2x_0^2 \int_{x_0}^{\infty} x \cdot x^{-3} dx = 2x_0^2 \cdot \frac{1}{x_0} = 2x_0 \end{aligned}$$

folgt für den gesuchten Parameter $x_0 = 1500$ \$.

d) Man rechnet:

$$\begin{aligned} P(X > 10\,000 | X > 3000) &= \frac{P(X > 10\,000, X > 3000)}{P(X > 3000)} = \frac{P(X > 10\,000)}{P(X > 3000)} \\ &= \frac{1 - F_X(10\,000)}{1 - F_X(3000)} = \frac{\left(\frac{x_0}{10\,000}\right)^2}{\left(\frac{x_0}{3000}\right)^2} = \left(\frac{3000}{10\,000}\right)^2 = \frac{9}{100} = 0.09 \end{aligned}$$

Beachte: Aufgrund der Form der Dichte ist das Ergebnis von x_0 unabhängig, so lange $x_0 < 3000$ \$ gilt!

Aufgabe 4

Der Zufallsvektor $(X, Y)^T$ sei auf der Kreisfläche $G = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ gleichverteilt.

- Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? (Begründung!)
- Berechnen Sie die Korrelation $E(XY)$ der Zufallsvariablen X und Y .
- Bestimmen Sie die Verbunddichte von $U_1 = X/Y$ und $U_2 = Y$. (**Hinweis:** Beachten Sie den Definitionsbereich!)
- Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $U_1 = X/Y$ eine *Cauchy-Verteilung* mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(u_1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + u_1^2}, \quad u_1 \in \mathbb{R}$$

besitzt.

- Skizzieren Sie die Dichte der Cauchy-Verteilung und bestimmen Sie deren Median.

Lösung

- Da der Definitionsbereich nicht rechteckförmig ist, sind die Dichten nicht unabhängig.
- Für die Korrelation rechnet man:

$$E(XY) = \int_G x \cdot y \cdot f(x, y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \cdot y \cdot \frac{1}{\pi} \, dy \, dx = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit folgt, da das innere Integral symmetrische Grenzen besitzt und die zu integrierende Funktion bzgl. y ungerade ist.

- Aus $X = U_1 U_2$ und $Y = U_2$ ergibt sich:

$$|\mathcal{J}| = \left| \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = |u_2|$$

und damit:

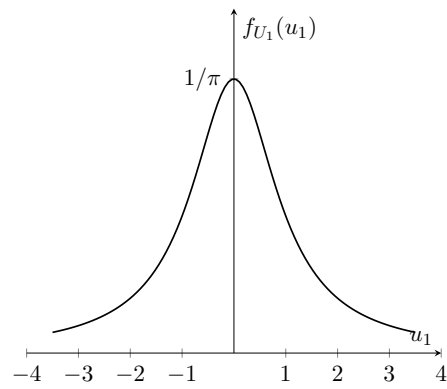
$$f_{(U_1, U_2)}(u_1, u_2) = |u_2| \cdot f_{(X, Y)}(u_1 u_2, u_2) = \begin{cases} \frac{|u_2|}{\pi}, & u_1^2 u_2^2 + u_2^2 \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe und der Aufgabenstellung entsteht die gesuchte Dichte als Randdichte von u_1 in dem Bereich $B = \{(u_1, u_2)^T : u_1^2 u_2^2 + u_2^2 \leq 1\}$:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \int_B f_{(U_1, U_2)}(u_1, u_2) \, du_2 = \int_{-1/\sqrt{1+u_1^2}}^{1/\sqrt{1+u_1^2}} \frac{|u_2|}{\pi} \, du_2 \\ &= 2 \int_0^{1/\sqrt{1+u_1^2}} \frac{u_2}{\pi} \, du_2 = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + u_1^2}, \quad u_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beachte: U_1 kann beliebige Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Dies ist sowohl anhand von $U_1 = X/Y$ als auch durch Betrachtung von B ersichtlich („ u_2 kann jedes noch so große u_1 in B drücken, sofern es klein genug ist“).

- Die Dichte ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Aufgrund der Symmetrie der Verteilung ist der Median 0.

Aufgabe 5

Sie befinden sich in einem Hörsaal und benutzen einen Beamer. Der Beamer wechselt seinen Zustand zu jeder vollen Minute. Es gibt vier **Zustände**:

- **Beamer aus:** Es besteht eine 25%-ige Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb einer Minute angeht. Er wechselt in diesem Fall in einen der drei anderen Zustände. Das Bild ist dabei in der Hälfte der Zeit verzerrt. Die beiden verbleibenden Zustände sind gleichwahrscheinlich.
- **Schwarzes Bild:** Der Beamer „erholt“ sich mit Wahrscheinlichkeit $15/16$ nicht innerhalb einer Minute, sondern verbleibt in diesem Zustand. Sonst ist das Bild danach gut.
- **Bild verzerrt:** Das Bild ist in der nächsten Minute immer gut.
- **Bild gut:** Das Bild ist eine Minute später in 13 von 16 Fällen immer noch gut. Es nimmt ansonsten einen der drei anderen Zustände gleichwahrscheinlich an.

Zu Beginn einer Übung ist der Beamer immer **aus**.

- Begründen Sie, weshalb es sich hierbei um eine Markoffkette handelt.
- Stellen Sie die Übergangsmatrix für diesen Prozess auf. (**Hinweis:** Es ist hilfreich, in Vielfachen von $1/16$ zu denken.)
- Berechnen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten zwei Minuten nach Beginn der Übung. Benutzen Sie Bruchdarstellung oder runden Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen.

Es gebe nun eine Übung, die *ewig* dauert.

- Geben Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten beliebig spät in der Übung an. Nennen Sie Ihren Ansatz!

Der Beamer wurde zwischenzeitlich repariert. Er funktioniert genau so wie bisher, mit dem Unterschied, dass das Bild gut bleibt, sobald es einmal gut ist.

- Wie lange dauert es ab Übungsbeginn im Mittel, bis der Beamer ein gutes Bild liefert?

Lösung

- Da die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Zuständen nur vom letzten Zustand abhängen (Markoffeigenschaft) und der Zustandsraum endlich ist, handelt es sich um eine Markoffkette.
-

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{15}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_2^T &= \mathbf{p}_0^T \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \mathbf{P}^2 = \frac{1}{16^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 12 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 12^2 + 1^2 & 12 + 15 + 1 & 12 \cdot 2 + 1^2 & 12 + 1 + 32 + 13 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 145 & 28 & 25 & 58 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,57 \\ 0,11 \\ 0,098 \\ 0,23 \end{pmatrix}^T
 \end{aligned}$$

d) Gesucht: Eigenvektor $\mathbf{p}$ zum Eigenwert 1. Ansatz:

$$\mathbf{P}^T - 1\mathbf{I} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -16 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus: Da gegen $\vec{0}$ gerechnet wird, $\frac{1}{16}$ ignorieren.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -16 & 1 \\ 1 & 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{Normierung}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{1}{16} \\ 1 & 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+=1, III+=\frac{1}{8}I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{32} \\ 1 & 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{IV-=I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{32} \\ 0 & 1 & 16 & -\frac{11}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-=II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{32} \\ 0 & 0 & 16 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{IV-=16 \cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Viertes Element frei wählbar!

$$\Rightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{p} = 1\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a \\ \frac{5}{4}a \\ \frac{3}{32}a \\ a \end{pmatrix}, \quad \|v\|_F \iff 1 \Rightarrow a = \frac{32}{83}$$

$$\Rightarrow \mathbf{p} = \frac{1}{83} \begin{pmatrix} 8 \\ 40 \\ 3 \\ 32 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,096 \\ 0,48 \\ 0,036 \\ 0,39 \end{pmatrix}$$

e) Die Reparatur fügt einen Rand zur Markoffkette hinzu. Dadurch kann die Dauer bis zum Wechseln in den Zustand **Bild gut** als Irrfahrtdauer von Zustand **aus** aus betrachtet werden. Setze Zustandsnummerierung

- 1 Beamer aus
- 2 Bild schwarz
- 3 Bild verzerrt
- 4 Bild gut (= Rand R)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 1 + \frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{16}m_2 + \frac{1}{8}m_3 + \frac{1}{16}m_r & m_r=0 & \frac{3}{4}m_1 + \frac{1}{16}m_2 + \frac{1}{8}m_3 \\
 m_2 &= 1 + \frac{15}{16}m_2 + \frac{1}{16}m_r & & = 1 + \frac{15}{16}m_2 & \implies m_2 = 16 \\
 m_3 &= 1 + m_r & & = 1 \\
 m_4 &= m_r & & = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4}m_1 = 1 + \frac{1}{16}16 + \frac{1}{8}1 \qquad \qquad \qquad = \frac{17}{8} \qquad \qquad \qquad \implies m_1 = \frac{17}{2} = 8,5$$

Es dauert im Mittel 8,5 min.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein einfacher Integrator mit der Differenzengleichung

$$Y[n] = X[n] + X[n-1].$$

Das Eingangssignal sei ein stationärer, mittelwertfreier, *weißer* zeitdiskreter Prozess $X[n]$ mit der Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}[k] = \sigma^2 \delta[k]$.

- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Y[n]$. Begründen Sie Ihre Teilschritte sorgfältig!
- Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses $\varphi_{YY}[n_1, n_2]$. Argumentieren Sie, ob der Ausgangsprozess stationär ist.
- Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses.
- Berechnen Sie die Leistung des Ausgangsprozesses im Zeit- und im Frequenzbereich.

Hinweis: Verwenden Sie, sofern notwendig, für die Abtastzeit den Wert $T = 1$ s.

Lösung

- Da der Eingangsprozess mittelwertfrei ist, folgt $E(X[n])=0$ und damit $E(Y[n]) = 0$. Weiterhin ist aufgrund der Weißheit (!) des Eingangsprozesses:

$$D^2(Y[n]) = D^2(X[n]) + D^2(X[n-1]) = 2\sigma^2$$

- Man berechnet:

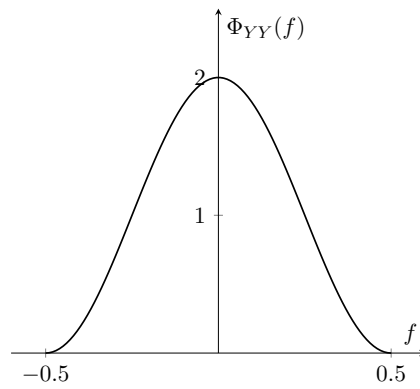
$$\begin{aligned}\varphi_{YY}[n_1, n_2] &= E((X[n_1] + X[n_1-1])(X[n_2] + X[n_2-1])) \\ &= \varphi_{XX}[n_1 - n_2] + \varphi_{XX}[n_1 - (n_2 - 1)] + \\ &\quad + \varphi_{XX}[(n_1 - 1) - n_2] + \varphi_{XX}[(n_1 - 1) - (n_2 - 1)] \\ &= \sigma^2 (\delta[n_1 - n_2] + \delta[n_1 - n_2 + 1] + \delta[n_1 - 1 - n_2] + \delta[(n_1 - 1) - (n_2 - 1)]) \\ &= \begin{cases} 2\sigma^2, & n_1 - n_2 = 0 \\ \sigma^2, & |n_1 - n_2| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Da die AKF nur von der Zeitdifferenz abhängt und laut Teilaufgabe a) der Erwartungswert zeitunabhängig ist, ist der Prozess stationär.

- Durch zeitdiskrete Fouriertransformation ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi_{YY}(f) &= 2\sigma^2 + \sigma^2 e^{-j2\pi fT} + \sigma^2 e^{j2\pi fT} \\ &\stackrel{T=1}{=} 2\sigma^2 \cdot (1 + \cos(2\pi f))\end{aligned}$$

Ergänzung: (nicht klausurrelevant) Das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses ist für $\sigma^2 = 1$ in der folgenden Abbildung dargestellt. Der Integrator erzeugt ein tiefpassgefiltertes Ausgangssignal.



d) Die Leistung eines stochastischen Prozesses ergibt sich als

1. der Wert der AKF an der Stelle 0, also $P_Y = \varphi_{XX}[0] = 2\sigma^2$.
2. das Integral über die Leistungsdichte über eine Periode, also

$$P_Y = \frac{1}{1/T} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 2\sigma^2 \cdot (1 + \cos(2\pi fT)) \, df$$

$$\stackrel{T=1}{=} 2\sigma^2 \left[f + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi f) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2\sigma^2$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^k n^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (\text{B.6})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.7})$$