

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
25.03.2021

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **null** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

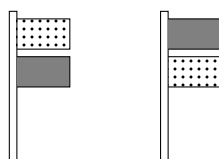
Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **28.04.2021** im Online-Notensystem. Details zur **Klausureinsicht** finden Sie auf der Webseite des Instituts. Dort werden Sie auch weitere Informationen zur **mündlichen Nachprüfung** finden.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1

Für einen Staatsempfang werden K unterscheidbare Flaggen auf N Masten aufgehängt. Hierbei wird jede Flagge unabhängig von allen anderen Flaggen gleichwahrscheinlich auf die Masten verteilt. Die Masten werden als ausreichend hoch angenommen, sodass auf jedem Mast alle Flaggen Platz finden.

- Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, um $L < K$ Flaggen auf 1 Mast zu verteilen, wenn die *vertikale Anordnung relevant* ist. (2 Punkte)
- Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, um K Flaggen auf N Masten zu verteilen, wenn die *vertikale Anordnung irrelevant* ist. (2 Punkte)
- Begründen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, um K Flaggen auf N Masten zu verteilen, wenn die *vertikale Anordnung relevant* ist, sodass beispielsweise die Anordnungen



als verschieden angesehen werden.

Hinweis: Beginnen Sie Ihre Betrachtungen für die erste, zweite und dritte Flagge und verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis. (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben lösbar.

Im Folgenden betrachten Sie die Zufallsvariable X_1 , die die *Anzahl* der Flaggen auf dem ersten Mast *ohne Berücksichtigung der vertikalen Anordnung* beschreibt.

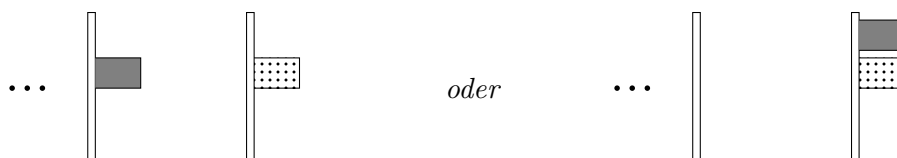
- Erstellen Sie die formale Darstellung ($\Omega = \dots$) dieses Zufallsexperimentes. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1 . Welche Verteilung ergibt sich? (4 Punkte)
- Die Parameter seien nun $N = 50$, $K = 5\,000$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf dem ersten Mast zwischen 89 und 123 Flaggen hängen. (3 Punkte)

Lösung

- Der Freiheitsgrad bei der Verteilung von L Flaggen auf einem Mast besteht in der vertikalen Anordnung der Flaggen. Hierfür gibt es $L(L-1) \cdots 2 \cdot 1 = L!$ Möglichkeiten.
- Für jede der Flaggen gibt es N Möglichkeiten, sodass es insgesamt N^K Möglichkeiten gibt.
- Die Betrachtungen werden für die ersten Schritte ausführlich durchgeführt:

Für die 1. aufgehängte Flagge gibt es N Möglichkeiten. Bei der 2. Flagge gibt es $N-1+2$ Möglichkeiten, da entweder ein leerer Mast gewählt werden kann ($N-1$) oder die Flagge beim belegten Mast über oder unter der bereits hängenden Flagge liegen kann.

Bei der 3. Flagge gibt es zwei mögliche Ausgangssituationen gemäß:



und somit

$$\underbrace{N-2}_{\text{nicht belegte Masten}} + \underbrace{2}_{\text{1. belegter Mast}} + \underbrace{2}_{\text{2. belegter Mast}} = N+2$$

oder

$$\underbrace{N-1}_{\text{nicht belegte Masten}} + \underbrace{3}_{\text{Position auf dem belegten Mast}} = N+2$$

Allgemein erhöht jede gesetzte Flagge die Anzahl der Möglichkeiten um 1 (relativ zu der Situation davor), da alle anderen Möglichkeiten gleich bleiben und man in Bezug zu dieser neuen Flagge 1 Möglichkeit mehr (darüber/darunter) hat.

Allgemein gibt es für die K Flaggen somit

$$N \cdot (N+1) \cdots (N+K-1)$$

Möglichkeiten.

d) Die Verteilung der Flaggen auf die Masten kann modelliert werden als

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_K) : a_i \in \{1, \dots, N\}\},$$

wobei a_i den Mast beschreibt, auf den die i -te Flagge gehisst wird.

Definiert man das Ereignis

$$F_1 := \{\text{Flagge wird auf Mast 1 gehisst}\},$$

so ist $X_1 := \sum_{i=1}^K \mathbb{1}_{F_1}(a_i)$. Da die Flagge mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Mast gehisst wird, ist

$$P(\mathbb{1}_{F_1}(a_i) = f) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & f = 1 \\ 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}, & f = 0 \end{cases}.$$

Mit der Definition $p := \frac{1}{N}$ ergibt sich für X_1 eine Binomialverteilung: $X_1 \sim \text{Bin}(K, p)$ und somit

$$P(X_1 = i) = \binom{K}{i} p^i (1-p)^{K-i}$$

e) Es liegt eine Binomialverteilung mit „vielen“ Realisierungen vor. Die Voraussetzungen von de Moivre-Laplace sind wegen $Kp(1-p) = 5000 \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{49}{50} = \frac{5000 \cdot 49}{2500} \approx 98 > 16$ erfüllt.

Somit rechnet man (in Rot mit Stetigkeitskorrektur):

$$\begin{aligned} P(89 \leq X_1 \leq 123) &= P\left(\frac{89 - Kp}{\sqrt{Kp(1-p)}} \leq \frac{X_1 - Kp}{\sqrt{Kp(1-p)}} \leq \frac{123 - Kp}{\sqrt{Kp(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{123 - Kp + \frac{1}{2}}{\sqrt{Kp(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{89 - Kp - \frac{1}{2}}{\sqrt{Kp(1-p)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{123 - 100 + \frac{1}{2}}{\sqrt{98}}\right) - \Phi\left(\frac{89 - 100 - \frac{1}{2}}{\sqrt{98}}\right) \\ &\approx \Phi(2,323 \text{ , } 2,374) - \Phi(-1,111 \text{ , } -1,162) \\ &\stackrel{\text{Tabelle}}{=} 0,990 - (1 - 0,866) \text{ , } 0,991 - (1 - 0,877) \\ &= 0,856 \text{ , } 0,868 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sie beobachten eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}$ mit der Dichte

$$f_X(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha, x \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimmen Sie den Wert α . (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Varianz von X . (3 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X^4 \leq 256$ ist. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorhergehenden Teilaufgaben und unabhängig voneinander lösbar.

- d) Weisen Sie nach, dass die Funktion, die aus X durch $U = m(X)$ eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable U erzeugt, genau $m(X) = F_X(X)$ ist. (3 Punkte)
- e) Es sei Y eine von X (mit $f_X(x)$ wie oben gegeben) *unabhängige* Zufallsvariable mit unbekannter Dichte $f_Y(y)$. Die Zufallsvariable Z sei

$$Z = X + \ln(Y).$$

Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{Z,X}(z, x)$ in Abhängigkeit von $f_Y(y)$. (4 Punkte)

Lösung

- a) Entweder: Vergleich mit der einseitigen Exponentialverteilung ergibt direkt $\alpha = 2$, da durch den Betrag von x und die Definition auf ganz $\mathbb{R}$ jedes Intervall halb so wahrscheinlich sein muss wie bei der $\text{Exp}(2)$ -Verteilung, oder Herleitung über

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} [e^{-\alpha x}]_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{\alpha} \stackrel{!}{=} 1.$$

- b) Aufgrund der symmetrischen Dichte ist $E(X) = 0$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx && \text{part. Integration} \\ &= 2 \left[x^2 \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2x} \right]_{x=0}^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} 2x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2x} dx \\ &= 2[-0 + 0] + \int_0^{\infty} 2x e^{-2x} dx = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt entweder wegen $E(\tilde{X} \sim \text{Exp}(2)) = \frac{1}{2}$ oder durch erneute partielle Integration folgt.

Alternativ kann in der zweiten Zeile die Identität C.7 aus der Formelsammlung verwendet werden.

- c) Man rechnet:

$$P(X^4 \leq 256) = P(-\sqrt[4]{256} \leq X \leq \sqrt[4]{256}) = P(-4 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(-4) \quad (1)$$

Eine Nebenrechnung liefert die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &:= \int_{-\infty}^x f_X(u) \, du \\
 &= \begin{cases} \int_{-\infty}^x e^{2u} \, du & x \leq 0 \\ F_X(0) + \int_{-\infty}^x e^{2u} \, du & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} [e^{2u}]_{u=-\infty}^x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [e^{-2u}]_{u=0}^x & x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} [e^{2x} - e^{-\infty}] & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [e^{-2x} - e^0] & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2x} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-2x} & x > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$P(X^4 \leq 56) = 1 - \frac{1}{2} e^{-8} - \frac{1}{2} e^{-8} = 1 - e^{-8}$$

d) $U = m(X)$ soll gleichverteilt sein, dann muss $F_U(u) = u$ sein (auf $[0, 1]$).

Vergleich: Die Definition der Verteilungsfunktion von X lautet:

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &:= P(X \leq x) && \text{Umkehrabb. existiert, weil } m(x) \stackrel{!}{=} F_U(x) \text{ nicht nur} \\
 &&& \text{monoton, sondern sogar str. monoton:} \\
 &= P(m^{-1}(U) \leq x) && \text{beide Seiten der Ungl. } m(\cdot): \\
 &= P(U \leq m(x)) \\
 &= F_U(m(x)) && \text{da } F_U \text{ Gleichverteilung:} \\
 &= m(X);
 \end{aligned}$$

alternativ kann man ausgehend von der Def. der Verteilung von U auch zeigen:

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &:= P(U \leq u) \\
 &= P(m(X) \leq u) \\
 &= P(X \leq m^{-1}(u)) \\
 &= F_X(m^{-1}(u)) && \text{da } m \stackrel{!}{=} F_X \\
 &= m(m^{-1}(u)) = u, \text{ wie gefordert.}
 \end{aligned}$$

e) Gemeinsame Dichte: Variablentransformation mittels Jacobi-Determinante.

Setze $U_1 = X + \ln(Y)$, $U_2 = X \implies h_1 = U_2$, $h_2 = e^{U_1 - U_2}$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} h_1 & \frac{\partial}{\partial x} h_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} h_2 & \frac{\partial}{\partial x} h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} x & \frac{\partial}{\partial x} x \\ \frac{\partial}{\partial z} e^{z-x} & \frac{\partial}{\partial x} e^{z-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{z-x} & (-1) \end{pmatrix} \\
 \det \mathcal{J} &= -e^{z-x} \\
 f_{X,Z}(x, z) &= |\det \mathcal{J}| \cdot f_{X,Y}(h_1(x, z), h_2(x, z)) && \text{Unabh.} \\
 &= e^{z-x} \cdot f_X(h_1(x, z)) \cdot f_Y(h_2(x, z)) \\
 &= e^{z-x} \cdot f_X(x) \cdot f_Y(e^{z-x}) \\
 &= e^{z-x} \cdot e^{-\alpha|x|} \cdot f_Y(e^{z-x})
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein mehrstufiges Zufallsexperiment mit

$$\Omega = \{(A, B, C) : A \in \{0, 1\}, B \in \{0, 1, 2\}, C \in \{0, 1\}\},$$

wobei $P(B = 0) = \frac{1}{2}P(B = 1) = \frac{1}{3}P(B = 2)$.

- a) Zeichnen Sie die zugehörige Baumdarstellung und beschriften Sie alle Knoten. Streichen Sie nicht erreichbare Übergänge. (2 Punkte)

Hinweis: Zeichnen Sie Ihre Darstellung ausreichend groß, um im Folgenden die Übergangswahrscheinlichkeiten an den Kanten nachtragen zu können.

Es gelte nun: $P(B = 0|A = 0) = P(B = 1|A = 1) = 0$.

- b) Beschriften Sie alle nun bekannten Kanten. (2 Punkte)

Nun gilt: $P(A = 0, B = 2, C = 1) = \frac{5}{24}$ und $P(B = 2, A = 0) = \frac{5}{12}$.

- c) Berechnen und beschriften Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(C = 1|A = 0, B = 2)$ und $P(C = 0|A = 0, B = 2)$. (2 Punkte)
- d) Berechnen Sie $P(B = 2)$ und dann $P(A = 1, B = 2)$. (2 Punkte)

Weiterhin gilt: $P(A = 1, B = 0|C = 1) = P(A = 0, B = 1|C = 1) = 0$.

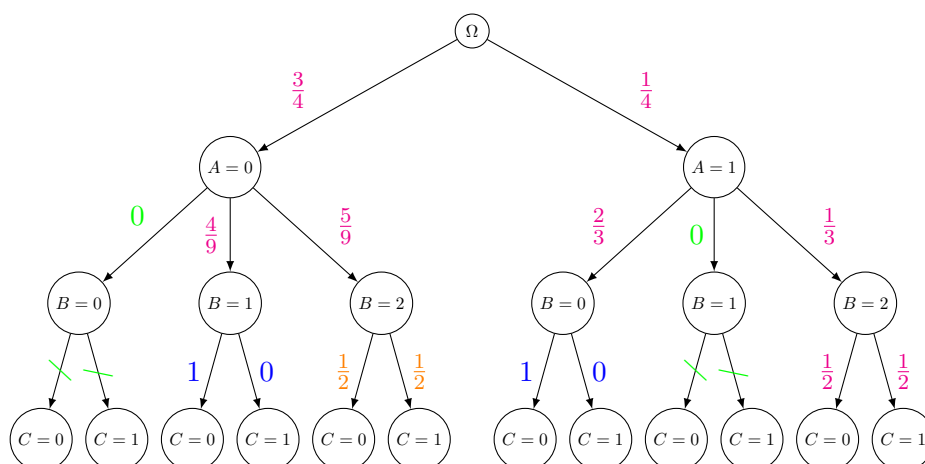
- e) Berechnen und beschriften Sie $P(C = 1|A = 0, B = 1)$ und $P(C = 1|A = 1, B = 0)$ sowie $P(C = 0|A = 0, B = 1)$ und $P(C = 0|A = 1, B = 0)$. (3 Punkte)

Außerdem gilt zusätzlich: $P(C = 0) = 3 \cdot P(C = 1)$, $P(A = 1, B = 2|C = 1) = \frac{1}{6}$ sowie $P(C = 0|A = 0) = \frac{13}{18}$.

- f) Berechnen und beschriften Sie alle verbleibenden Kanten. (4 Punkte)

Lösung

- a) Gefragt war nach folgendem Baum ohne die farbigen Kantengewichte.



- b) Wenn ein Knoten nie erreicht wird, dann können auch alle nachfolgenden Knoten nie erreicht werden. Die Lösung ist in oberen Diagramm in grün.

- c) Die Lösung ist in oberem Diagramm in **orange**.

$$\begin{aligned} \text{Mit } P(A=0, B=2, C=1) &= P(C=1|A=0, B=2) \cdot P(A=0, B=2) = \frac{5}{24} \\ \Rightarrow P(C=1|A=0, B=2) &= \frac{5 \cdot 12}{24 \cdot 5} = \frac{1}{2} \text{ und} \\ \Rightarrow P(C=0|A=0, B=2) &= 1 - P(C=1|A=0, B=2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- d) Durch $P(B=0) = \frac{1}{2}P(B=1) = \frac{1}{3}P(B=2)$ und aufgrund von $P(B=0) + P(B=1) + P(B=2) = 1$ folgt $P(B=2) = \frac{1}{2}$. Außerdem gilt durch Marginalisierung $\sum_{a \in \{0,1\}} P(B=2, A=a) = P(B=2) = \frac{1}{2}$.
Somit ist $P(A=1, B=2) = P(B=2) - P(A=0, B=2) = \frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$.

- e) Die Lösung ist in oberem Diagramm in **blau**.

$$\begin{aligned} \text{Marginalisierung ergibt } P(B=0) &= \sum_{a \in \{0,1\}} P(B=0, A=a) = P(B=0, A=1) = \\ &= \frac{1}{3}P(B=2) = \frac{1}{6}. \text{ Daraus folgt, dass } P(B=0, A=1) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(C=1|A=1, B=0) &= \frac{P(A=1, B=0, C=1)}{P(A=1, B=0)} \\ &= \frac{P(A=1, B=0|C=1)P(C=1)}{P(A=1, B=0)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem folgt daraus: $P(C=0|A=1, B=0) = 1 - P(C=1|A=1, B=0) = 1$.

Analog: $P(C=1|A=0, B=1) = 0$ und $P(C=0|A=0, B=1) = 1$.

- f) Die Lösung ist in oberem Diagramm in **magenta**.

$$\begin{aligned} \text{Mit } P(C=0) + P(C=1) &= 4P(C=1) = 1 \Rightarrow P(C=1) = \frac{1}{4} \text{ und } P(C=0) = \frac{3}{4} \text{ ergibt} \\ \text{sich } P(C=1|A=1, B=2) &= P(A=1, B=2|C=1) \cdot \frac{P(C=1)}{P(A=1, B=2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 12}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2} \text{ und} \\ P(C=0|A=1, B=2) &= 1 - P(C=1|A=1, B=2) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } P(C=0|A=0) &= \sum_{b \in \{0,1,2\}} P(C=0|A=0, B=b) \cdot P(B|A=0) = \\ 1 \cdot P(B=1|A=0) &+ \frac{1}{2} \cdot P(B=2|A=0) = \frac{13}{18} \text{ und} \\ 1 &= \underbrace{P(B=0|A=0)}_{=0} + P(B=1|A=0) + P(B=2|A=0) \text{ folgt} \\ 1 - P(B=2|A=0) &+ \frac{1}{2} \cdot P(B=2|A=0) = \frac{13}{18} \\ \Rightarrow P(B=2|A=0) &= 2 \cdot (1 - \frac{13}{18}) = \frac{5}{9} \text{ und } P(B=1|A=0) = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiterhin: } P(B=1) &= \frac{2}{3}P(B=2) = \frac{1}{3} = P(B=1, A=0) = P(B=1|A=0) \cdot P(A=0) \\ \Rightarrow P(A=0) &= \frac{1 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4} \text{ und } P(A=1) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit ergibt sich mit } P(B=0) &= \frac{1}{6} = P(B=0, A=1) = P(B=0|A=1) \cdot P(A=1) \\ \Rightarrow P(B=0|A=1) &= \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 1} = \frac{2}{3} \text{ und } P(B=2|A=1) = 1 - P(B=0|A=1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

- a) Sie schätzen die Futtermenge für Ihre Fische jeden Tag. Diese Schätzungen sind voneinander unabhängig. Der Erwartungswert jeder Schätzung ist 20 g und Varianz $1,6 \text{ g}^2$. Ihre Fische sterben, wenn die tägliche Futtermenge um mehr als 4 g vom Sollwert 20 g abweicht. Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen Ihre Fische 50 % Wahrscheinlichkeit haben, einzugehen. (3 Punkte)
- b) Gegeben ist eine diskrete Zufallsvariable X mit Werten $x \in \mathcal{X} = \{a, \dots, b\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, mit $\mu := E(X) \in [a, b]$. Verwenden Sie die in diesem Fall gültige Ungleichung

$$0 \leq (x - a)(b - x) \quad \text{und somit} \quad x^2 \leq (b + a)x - ab$$

zur Herleitung von:

$$V(X) \leq (\mu - a)(b - \mu) \leq \frac{1}{4}(b - a)^2 \quad (*)$$

(4 Punkte)

- c) Finden Sie eine Verteilung auf $\mathcal{X} = \{1, \dots, 6\}$, welche die Varianz maximiert. (3 Punkte)

Hinweis: Sie können die Verteilung „erraten“ und nachweisen, dass diese Verteilung die obere Schranke der Varianz aus Gl. (*) annimmt.

- d) Bestimmen Sie die Verteilung des Minimums von drei sechsseitigen Würfeln. (5 Punkte)

Lösung

- a) Tschebyscheff'sche Ungleichung zur Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten bei unbekannter Verteilung, aber bekannter Varianz:

$$\begin{aligned} p_{\text{tot}} &= P(|X - E(X)| \geq 4) && \text{Tschebyscheff'sche Ungleichung} \\ &\leq \frac{1}{4^2} E(\underbrace{(X - E(X))^2}_{=V(X)}) \\ &= \frac{1,6}{16} = \frac{1}{10} = 1 - p_{\text{ok}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,5 &\stackrel{!}{\leq} p_{\text{ok}}^n \\ \log \frac{1}{2} &\leq n \log(1 - p_{\text{tot}}) && || : \log(1 - p_{\text{tot}}) < 0 \\ \frac{\log \frac{1}{2}}{\log(1 - p_{\text{tot}})} &\geq n \\ 6,5 &\geq n \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Der Fisch braucht sich frühestens nach 7 Tagen Gedanken darüber machen, dass er mit mehr als 50%-iger Wahrscheinlichkeit eingeht.

- b) Aus $0 \leq (x - a)(b - x)$ folgt $x^2 \leq (b + a)x - ab$. Damit rechnet man:

$$E(X^2) = \sum_{x=a}^b x^2 P_X(x) \leq \sum_{x=a}^b ((b + a)x - ab) \cdot P_X(x) = (b + a)\mu - ab$$

Einsetzen in die Varianz ergibt:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \leq (b+a)\mu - ab - \mu^2 = (b-\mu)(\mu-a)$$

Die zweite Ungleichung folgt aus

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\mu-a)(b-\mu) = 0 \iff \mu = \frac{a+b}{2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}(\mu-a)(b-\mu) = -2 < 0$$

und einsetzen. An den Randpunkten ergibt sich jeweils ein Wert von 0, sodass diese keine Maxima sind.

- c) Idee: Wähle eine Verteilung mit „Wahrscheinlichkeit so weit weg vom Mittelpunkt wie möglich“ und teste, ob sie maximale Varianz besitzt. Für $P_X(1) = \frac{1}{2} = P_X(6)$ folgt $\mu = \frac{7}{2}$ und $V(X) = \frac{25}{4}$.

Für $a = 1$, $b = 6$ ergibt sich aufgrund der Ungleichung (*) die Abschätzung $V(X) \leq \frac{25}{4}$. Die geratene Verteilung besitzt also die maximale Varianz.

- d) Den Wurf modelliert man als $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, $X_i \in \{1, \dots, 6\}$. Der kleinste Wurf $Y := \min\{X_1, X_2, X_3\}$ hat die Verteilung:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \leq y) = 1, & y = 6 \\ F_Y(y) &= 1 - P(\min\{X_1, X_2, X_3\} \geq y+1), & 1 \leq y \leq 5 \\ &= 1 - (P(X_1 \geq y+1))^3 = 1 - \left(\frac{6-y}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

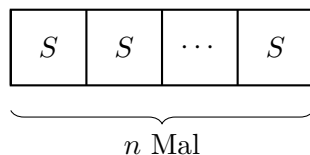
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, y > 6 \\ 1 - \left(\frac{6-y}{6}\right)^3, & y \in \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

Damit folgt für die Verteilung:

$$P_Y(y) = F_Y(y) - F_Y(y-1) = \dots = \frac{1}{216} \cdot (127 - 39y + 3y^2), y \in \{1, \dots, 6\}$$

Aufgabe 5

Sie haben eine Datenquelle gegeben, die einen zufälligen Wert $S \in \{-1, +1\}$ erzeugt, wobei $P(S = +1) = p_{+1}$ und $P(S = -1) = p_{-1} = 1 - p_{+1}$. Der zufällig erzeugte Wert wird anschließend n Mal wiederholt:



Jeder einzelne der n Werte wird anschließend mit einer Störung $N_\ell \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2\pi})$ überlagert, wobei die N_ℓ paarweise unabhängig sind. Dies führt auf

$$Y_\ell = S + N_\ell, \quad \ell = 1, \dots, n.$$

Zur Schätzung von S aus den gestörten Beobachtungen berechnen Sie die Kenngröße

$$R = \sum_{\ell=1}^n Y_\ell.$$

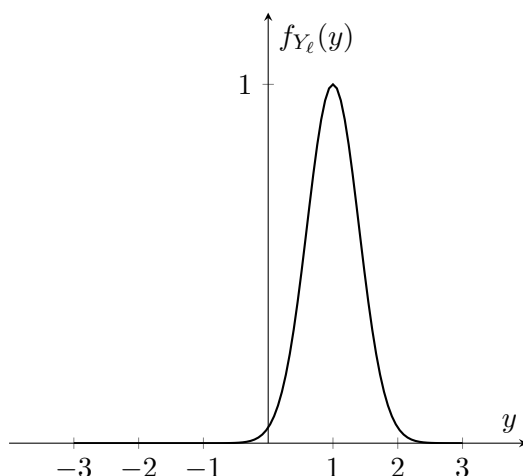
- a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_ℓ , falls $S = +1$ ist. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und beschriften Sie die Achsenabschnitte im Maximum der Dichte. (2 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Verteilung von Y_ℓ . Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für $p_{+1} = 0,6$. (3 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die Verteilung von R für $S = +1$. (3 Punkte)
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $R < 0$ für den Fall $S = +1$ und $n = 2$. (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben lösbar.

- e) Nun sei $N_\ell \sim \mathcal{U}(-3, 3)$ und die N_ℓ seien paarweise unabhängig. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $R < 0$, falls $S = +1$ und $n = 40$. (4 Punkte)

Lösung

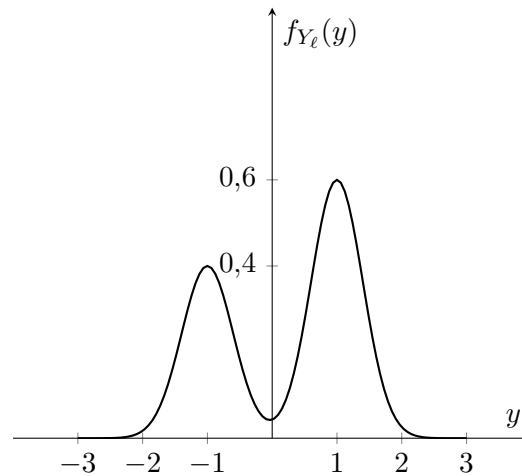
- a) Für $S = +1$ ist $Y_\ell = 1 + N_\ell$. Damit ist $Y_\ell \sim \mathcal{N}(1, \frac{1}{2\pi})$. Die entsprechende Normalverteilung findet sich in folgender Skizze:



b) Über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$f_{Y_\ell}(y) = p_{+1} \cdot f_{Y_\ell|S=+1}(y|S=+1) + p_{-1} \cdot f_{Y_\ell|S=-1}(y|S=-1)$$

Für $p_{+1} = 0,6$ ist dies in der folgenden Abbildung dargestellt.



c) Für jede Stelle ist $Y_\ell \sim \mathcal{N}(1, \frac{1}{2\pi})$. Da die N_ℓ unabhängig sind, sind somit die Y_ℓ ebenfalls unabhängig.

Die Verteilung von R ergibt sich als die Verteilung einer Summe unabhängiger Gaußverteilungen. Somit folgt:

$$R \sim \mathcal{N}\left(n, \frac{n}{2\pi}\right)$$

d) Wegen

$$R \sim \mathcal{N}\left(n, \frac{n}{2\pi}\right)$$

folgt die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses¹ zu:

$$\begin{aligned} P(R < 0 | S = +1) &= P\left(\frac{R - n}{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}} < -\frac{n}{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}} \middle| S = +1\right) \\ &= \Phi\left(-\sqrt{n2\pi}\right) = \Phi(-3,545) \\ &= 1 - \Phi(3,545) \approx 1 - 0,9998 = 0,0002 \end{aligned}$$

e) Die Größe Y_ℓ ist nicht mehr von vornherein normalverteilt. Für jede Komponente entsteht im Fall $S = +1$ die Verteilung $Y_\ell \sim \mathcal{U}(-2, 4)$. Man kann dann rechnen:

$$\begin{aligned} P(R < 0 | S = +1) &= P\left(\sum_{\ell=1}^n Y_\ell < 0 \middle| S = +1\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{\ell=1}^n Y_\ell - n \cdot 1}{\sqrt{\frac{n \cdot 36}{12}}} < \frac{-n \cdot 1}{\sqrt{\frac{n \cdot 36}{12}}} \middle| S = +1\right) \\ &\approx \Phi\left(-\frac{\sqrt{40 \cdot 12}}{\sqrt{36}}\right) \\ &= 1 - \Phi(3,651) \approx 1 - 0,99987 = 0,00013 \end{aligned}$$

¹In NT 1 als *Fehlerwahrscheinlichkeit* $P_{e|S=+1}$ bezeichnet.

Aufgabe 6

Eine binäre Quelle wird durch einen zeitdiskreten stochastischen Prozess $(X[n])_{n=1,2,\dots}$ beschrieben, in dem zu jedem Zeitpunkt gleichwahrscheinliche und voneinander unabhängige Bits $X[n] \sim \mathcal{U}\{0, 1\}$ erzeugt werden.

- Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $(X[n])_{n=1,2,\dots}$. Ist der Prozess stark oder schwach stationär? (4 Punkte)
- Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum des Prozesses und daraus dessen mittlere Leistung. (2 Punkte)
- Rechtfertigen Sie die in der vorherigen Teilaufgabe berechnete mittlere Leistung durch Betrachtung der Autokorrelationsfunktion. (2 Punkte)

Aus dem Prozess $(X[n])_{n=1,2,\dots}$ wird ein neuer stochastischer Prozess $(Y[n])_{n=1,2,\dots}$ erzeugt, indem die Werte $X[1], \dots, X[n]$ durch logisches ODER verknüpft werden:

$$Y[n] := \bigvee_{k=1}^n X[k], \quad n = 1, 2, \dots$$

- Bestimmen Sie die Verteilung von $Y[n]$ und begründen Sie, ob der Prozess $(Y[n])_{n=1,2,\dots}$ schwach stationär ist. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die mittlere Dauer, bis der Prozess $(Y[n])_{n=1,2,\dots}$ den Zustand $Y[n] = 1$ erreicht. (4 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie eine Zufallsvariable T , die die Zeitdauer bis zum (ersten) Eintreten von $Y[n] = 1$ beschreibt.

Lösung

- Man rechnet

$$E(X[n]) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_{XX}(n, m) &= E(X[n]X[m]) \\ &= \begin{cases} E((X[n])^2) = E(X[n]) = \frac{1}{2}, & n = m \\ E(X[n]) \cdot E(X[m]) = \frac{1}{4}, & n \neq m \end{cases} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta[n - m]. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich mit $k := n - m$ die AKF $\varphi_{XX}[k] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta[k]$.

Da der Erwartungswert zeitinvariant ist und die AKF nur von der Verschiebung k abhängt, ist der Prozess mindestens schwach stationär.

Tatsächlich ist der Prozess stark stationär, da die Bits zu jedem Zeitpunkt unabhängig und identisch verteilt erzeugt werden.

- Aus der AKF in Teilaufgabe a) folgt:

$$\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta[k] \right\} = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4}.$$

Die Leistung ergibt sich (mit $f_p = 1$) durch:

$$P_X = \frac{1}{1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4} df = \frac{1}{2}.$$

c) Die mittlere Leistung ergibt sich als AKF an der Stelle 0:

$$P_X = \varphi_{XX}(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta[0] = \frac{1}{2}.$$

d) Aufgrund der ODER-Verknüpfung folgt

$$\begin{aligned} P(Y[n] = 0) &= P(X[k] = 0 \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n\}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ P(Y[n] = 1) &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Damit ist der Erwartungswert $E(Y[n]) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ zeitabhängig, weswegen der Prozess nicht schwach stationär ist.

e) Bezeichnet man den (zufälligen) Zeitpunkt bis zum (ersten) Eintreten von $Y[n] = 1$ als T , formal

$$T := \inf\{\ell \in \{1, 2, \dots\} : Y[\ell] = 1\}$$

so ist

$$P(T = t) = P(X[1] = \dots = X[t-1] = 0, X[t] = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Daraus ergibt sich:

$$E(T) = \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \stackrel{(B.2)}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) \, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left(\cos(x - y) + \cos(x + y) \right) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \left(\cos(x - y) - \cos(x + y) \right) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \left(\sin(x - y) + \sin(x + y) \right) \quad (\text{D.5})$$