

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
14.02.2022

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **16.03.2022** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **23.03.2022** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **31.03.2022** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1

Ein Corona-Schnelltest habe eine Sensitivität von 80% und eine Spezifität von 95%. Die Sensitivität gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine infizierte Person ein positives Testergebnis erhält. Die Spezifität gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine nicht-infizierte Person ein negatives Ergebnis erhält.

- a) Es sei I das Ereignis, dass eine Person infiziert ist, und T das Ereignis, dass ein durchgeführter Schnelltest positiv ist. Geben Sie die Sensitivität und die Spezifität mithilfe der Ereignisse I und T als bedingte Wahrscheinlichkeiten an. (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person infiziert ist, obwohl sie ein negatives Schnelltestergebnis bekommt. Nehmen Sie an, dass im Schnitt eine von 200 Personen infiziert ist. (4 Punkte)

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Test negativ ist.

- c) Zu einer Geburtstagsfeier treffen sich 15 Freunde. Alle haben sich getestet und ein negatives Ergebnis bekommen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem mindestens einer der Freunde infiziert ist? (3 Punkte)

Hinweis: Nehmen Sie an, dass das Auftreten von Infektionen unabhängig voneinander ist.

- d) Ist die Annahme aus dem Hinweis der letzten Aufgabe gerechtfertigt? Begründen Sie. (2 Punkte)

In einer Stadt seien 80% der Menschen geimpft. In den Krankenhäusern der Stadt liegen 162 Personen, die mit dem Virus infiziert sind. Davon sind 79 Personen ungeimpft und 83 Personen geimpft.

- e) Um welchen Faktor verringert die Impfung die Wahrscheinlichkeit, dass man aufgrund einer Infektion im Krankenhaus behandelt werden muss? (4 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie die Ereignisse $G = \{\text{Person ist geimpft}\}$ sowie $K = \{\text{Person muss wegen Corona im Krankenhaus behandelt werden}\}$.

Lösung

- a) Sensitivität = $P(T|I)$, Spezifität = $P(\bar{T}|\bar{I})$
- b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Test negativ ist, lässt sich mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\begin{aligned} P(\bar{T}) &= P(\bar{T}|I) \cdot P(I) + P(\bar{T}|\bar{I}) \cdot P(\bar{I}) \\ &= (1 - P(T|I)) \cdot P(I) + P(\bar{T}|\bar{I}) \cdot P(\bar{I}) \\ &= (1 - 0,8) \cdot 0,005 + 0,95 \cdot 0,995 \\ &= 0,94625 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(I|\bar{T})$ kann man dann über den Satz von Bayes berechnen:

$$P(I|\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}|I) \cdot P(I)}{P(\bar{T})} = \frac{0,2 \cdot 0,005}{0,94625} \approx 1,06 \cdot 10^{-3}$$

Die Wahrscheinlichkeit trotz negativen Tests infiziert zu sein, beträgt also in etwa 0,1%.

- c) Die Wahrscheinlichkeit kann über das Gegenereignis berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 P(\geq 1 \text{ Person infiziert}) &= 1 - P(0 \text{ Personen infiziert}) \\
 &= 1 - P(\bar{I}|\bar{T})^{15} \\
 &= 1 - (1 - P(I|\bar{T}))^{15} \\
 &\approx 0,0157
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person trotz negativer Schnelltests infiziert ist, beträgt etwa 1,57%.

- d) Da die Personen befreundet sind, liegt es nahe, dass das Auftreten von Infektionen nicht unabhängig voneinander passiert. Vielmehr besteht die Chance, dass sich die Freunde gegenseitig anstecken und somit Infektionen gehäuft auftreten. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(I|I_{\text{Freund}})$, infiziert zu sein, wenn ein Freund Corona hat, ist also höher als die isolierte Wahrscheinlichkeit infiziert zu sein: $P(I|I_{\text{Freund}}) > P(I)$. Außerdem gilt natürlich auch, dass die Wahrscheinlichkeit infiziert zu sein geringer ist, wenn ein Freund nicht infiziert ist (da er mich ja dann nicht anstecken kann): $P(I|\bar{I}_{\text{Freund}}) < P(I)$.
- e) Wir definieren die Ereignisse $G := \{\text{Person ist geimpft}\}$ und $K := \{\text{Person muss wegen Corona im Krankenhaus behandelt werden}\}$. Wir suchen das Verhältnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(K|G)$ und $P(K|\bar{G})$. Mit dem Satz von Bayes ergibt sich:

$$\frac{P(K|G)}{P(K|\bar{G})} = \frac{P(G|K) \cdot P(K)}{P(G)} \cdot \frac{P(\bar{G})}{P(\bar{G}|K) \cdot P(K)} = \frac{P(G|K)}{P(G)} \cdot \frac{P(\bar{G})}{P(\bar{G}|K)}$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt nach Aufgabenstellung: $P(G) = 0,8$, $P(\bar{G}) = 1 - P(G) = 0,2$. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten können mithilfe der angegebenen Personenzahlen im Krankenhaus geschätzt werden: $P(G|K) \approx \frac{83}{83+79}$, $P(\bar{G}|K) \approx \frac{79}{83+79}$. Die nicht bekannte Wahrscheinlichkeit $P(K)$ kann gekürzt werden.

$$\frac{P(K|G)}{P(K|\bar{G})} = \frac{\frac{83}{83+79}}{0,8} \cdot \frac{0,2}{\frac{79}{83+79}} = \frac{83 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 79} \approx 0,26$$

Das Risiko wegen einer Coronainfektion ins Krankenhaus zu müssen, ist also um etwa 74% verringert.

Aufgabe 2

Sie wollen Ihre Wohnung mit einem Blumenbeet verschönern und pflanzen hierzu drei Samen ein. An jedem neuen Tag wird *jeder einzelne Samen unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu einer Blume*. Es wird außerdem angenommen, dass eine Blume für immer eine Blume bleibt.

- a) Modellieren Sie die Aufgabenstellung durch eine Markoff-Kette. Verwenden Sie die Anzahl der Blumen in Ihrem Beet als Zustandsgröße.

Zeichnen Sie den Übergangsgraphen inkl. der Übergangswahrscheinlichkeiten und geben Sie die Übergangsmatrix an. (5 Punkte)

- b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach 2 Tagen. (3 Punkte)

- c) Bestimmen Sie rechnerisch die stationäre Verteilung der Markoff-Kette, falls eine solche existiert. Erklären Sie Ihr Ergebnis anschaulich. (3 Punkte)

- d) Berechnen Sie, wie lange es im Mittel dauert, bis *alle* Samen zu Blumen geworden sind. (4 Punkte)

Lösung

- a) Laut Aufgabenstellung ist für jeden einzelnen Samen

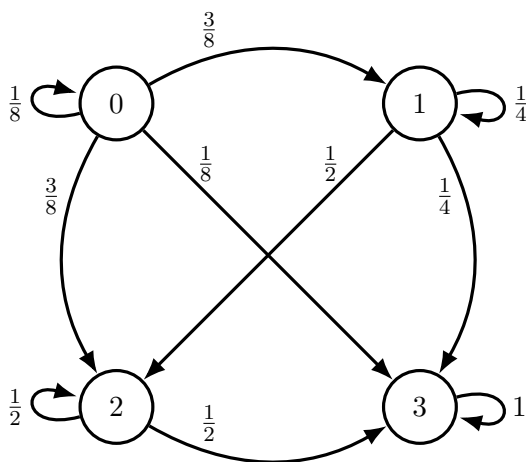
$$P(S \rightarrow B) = \frac{1}{2}, \quad P(S \rightarrow S) = \frac{1}{2}, \quad P(B \rightarrow B) = 1.$$

Sind schon $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ Samen erblüht, so sind nur noch $3 - i$ Samen übrig und für $Z[n] = \text{Anzahl Samen am Tag } n$ folgt für $j \geq i$:

$$P(Z[n+1] = j | Z[n] = i) = \binom{3-i}{j-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-i-(j-i)} \left(\frac{1}{2}\right)^{(j-i)} = \binom{3-i}{j-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-i}$$

Der Binomialkoeffizient entsteht dadurch, dass aus den $3 - i$ verbleibenden die $j - i$ gewählt werden, die für den Übergang $i \rightarrow j$ blühen müssen.

Der Übergangsgraph lautet:



Damit wird die Übergangsmatrix (Indizierung von $0 \dots 3$) zu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ 0 & \binom{2}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \binom{2}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \binom{2}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Die Aufgabenstellung erfordert die Wahrscheinlichkeitsverteilung nach zwei Tagen bei Start in 0 (kein Samen geblüht). Also ist:

$$\mathbf{p}^T(2) = \mathbf{p}^T(0) \cdot \mathbf{P}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{64} & \frac{9}{64} & \frac{27}{64} & \frac{27}{64} \end{pmatrix}$$

- c) Eine stationäre Verteilung π ist Eigenvektor von $\mathbf{P}^T$ zum Eigenwert 1. Es ergibt sich:

$$\mathbf{P}^T \cdot \pi = \pi$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T) \cdot \pi = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \pi \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Durch sukzessives Betrachten ergibt sich $\pi_0 = 0, \pi_1 = 0, \pi_2 = 0$. Außerdem ist π_3 frei wählbar. Somit ist die (einzige) stationäre Verteilung $\pi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Anschaulich ist die Verteilung stationär, da der Zustand 3 (alle geblüht) absorbierend ist und somit nicht mehr verlassen wird. Jeder andere Zustand kann nicht stationär sein, da der Zustandswert der Markoff-Kette niemals abnimmt.

- d) Durch Aufstellung der Beziehungen für die Dauer bis zum Erreichen eines stationären Zustands

$$m_0 = 1 + \frac{1}{8}m_0 + \frac{3}{8}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + \frac{1}{8}m_3$$

$$m_1 = 1 + \frac{1}{4}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{4}m_3$$

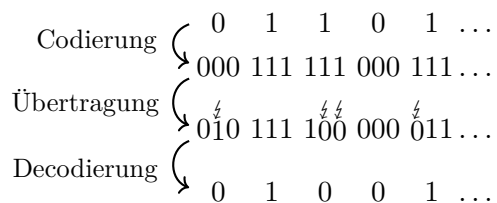
$$m_2 = 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3$$

$$m_3 = 0$$

ergibt sich sukzessive $m_2 = 2, m_1 = \frac{8}{3}$ und schließlich $m_0 = \frac{22}{7} \approx 3,143$ Tage.

Aufgabe 3

In einem Kommunikationssystem werden Bits übertragen. Da bei der Übertragung Bitfehler auftreten können, wird jedes Informationsbit zunächst codiert. Die Codierung besteht aus der dreifachen Wiederholung des Informationsbits. Ein Bitfehler tritt mit der Wahrscheinlichkeit $p = 4 \cdot 10^{-3}$ auf; verschiedene Fehler sind unabhängig voneinander. Am Empfänger wird eine Mehrheitsentscheidung durchgeführt: Von jeweils drei empfangenen Bits wird das Bit decodiert, das am häufigsten in den drei Bits vorkommt.



- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_F dafür, dass ein Bit bei der Decodierung falsch decodiert wird. (3 Punkte)

Wenn Sie die Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $P_F = 10^{-5}$ weiter.

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in einer Folge von fünf decodierten Bits mindestens ein Fehler auf? (2 Punkte)
- c) Die Zufallsvariable F_N gibt die Anzahl an Fehlern an, die nach der Decodierung von N Bits noch auftreten. Wie ist die Zufallsvariable F_N verteilt? Geben Sie den Namen der Verteilung sowie die Formel für $P(F_N = k)$ an. (3 Punkte)
- d) Nun werden 1 000 000 Informationsbits codiert, übertragen und decodiert. Berechnen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den decodierten Bits höchstens 50 Fehler auftreten. (4 Punkte)
- e) Sie sollen eine Garantie über die Anzahl an Fehlern bei der Übertragung von 1 000 000 Informationsbits abgeben. Welche maximale Anzahl an Fehlern in den decodierten Bits können Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% garantieren? (3 Punkte)

Lösung

- a) Ein Bit wird dann falsch decodiert, wenn zwei oder drei der übertragenen Codebits bei der Übertragung gekippt werden.

$$\begin{aligned}
 P_F &= P(3 \text{ Bitflips} \cup 2 \text{ Bitflips}) = p^3 + 3p^2(1-p) \\
 &= 1 - P(0 \text{ Bitflips} \cup 1 \text{ Bitflips}) = 1 - 3p(1-p)^2 - (1-p)^3 \\
 &= 3p^2 - 2p^3 \\
 &= 4,7872 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

- b) Die Wahrscheinlichkeit von mindestens einem Fehler lässt sich über das Gegenereignis berechnen. Da die Bitfehler bei der Übertragung unabhängig voneinander sind, kann direkt mit der bereits berechneten Wahrscheinlichkeit P_F für einen Fehler nach Decodierung gerechnet werden.

$$\begin{aligned}
 P(\text{mind. 1 Fehler}) &= 1 - P(\text{kein Fehler}) \\
 &= 1 - (1 - P_F)^5 \\
 &\stackrel{P_F \ll 1}{\approx} 5 \cdot P_F = 2,3936 \cdot 10^{-4}
 \end{aligned}$$

- c) Die Anzahl der Fehler k von N Bits insgesamt ist binomialverteilt. Da die Bitflips unabhängig voneinander auftreten, kann man direkt die in Aufgabenteil a) berechneten Wahrscheinlichkeit P_F für einen Ende-zu-Ende-Fehler verwenden:

$$P(F_N = k) = \binom{N}{k} P_F^k (1 - P_F)^{N-k}$$

- d) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung zu berechnen ist sehr aufwändig und numerisch schwierig. Die Verteilung kann mithilfe des zentralen Grenzwertsatz approximiert werden. Wir approximieren die binomialverteilte Zufallsvariable F_N (mit $N = 10^6$) durch die normalverteilte ZV $\tilde{F}_N \sim \mathcal{N}(NP_F, NP_F(1 - P_F))$. Die Approximation kann angewendet werden, da $V(F_N) = NP_F(1 - P_F) \approx 47,9 > 9$.

$$\begin{aligned} P(F_N \leq 50) &\approx P(\tilde{F}_N \leq 50) = P\left(\underbrace{\frac{\tilde{F}_N - NP_F}{\sqrt{NP_F(1 - P_F)}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{50 - NP_F}{\sqrt{NP_F(1 - P_F)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{50 - NP_F}{\sqrt{NP_F(1 - P_F)}}\right) \\ &= \Phi(0,3076) \approx 0,62 \end{aligned}$$

- e) Gesucht ist die Anzahl n_F , so dass $P(F_N \leq n_F) \stackrel{!}{=} 0,99$, mit $N = 10^6$. Es gilt:

$$P(F_N \leq n_F) \approx P(\tilde{F}_N \leq n_F) = \Phi\left(\frac{n_F - NP_F}{\sqrt{NP_F(1 - P_F)}}\right) \stackrel{!}{=} 0,99$$

Die Inverse der Verteilungsfunktion der Normalverteilung kann der Tabelle aus der Formelsammlung entnommen werden:

$$\frac{n_F - NP_F}{\sqrt{NP_F(1 - P_F)}} \stackrel{!}{=} \Phi^{-1}(0,99) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 2,34$$

Nach Umformung ergibt sich:

$$n_F = \Phi^{-1}(0,99) \cdot \sqrt{NP_F(1 - P_F)} + NP_F \approx 64,06$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% treten in den 1 000 000 decodierten Bits also circa 64 Fehler oder weniger auf.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Zufallsvariable X mit folgender Dichte:

$$f_X(x) := \begin{cases} 4 \cdot e^{-2x}, & 0 \leq x \leq g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) Berechnen Sie die Konstante g . (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $0,1 < X < 0,2$. (3 Punkte)
- c) Berechnen Sie das erste und zweite Moment sowie die Varianz von X . (5 Punkte)

Nehmen Sie nun an, dass eine Zufallsvariable Z durch Begrenzen einer exponentialverteilten Zufallsvariablen Y auf den Maximalwert $h = \frac{1}{2} \ln(2)$ entsteht, also:

$$Z = \begin{cases} Y, & 0 \leq Y \leq h \\ h, & Y > h \end{cases}, \quad f_Y(y) = 2 \cdot e^{-2y}, \quad y \geq 0.$$

- d) Skizzieren Sie $f_Z(z)$ qualitativ. (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie $E(Z)$. (3 Punkte)

Lösung

- a) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion muss normiert sein, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx = \int_0^g 4 \cdot e^{-2x} \, dx \\ &= \left[-\frac{4}{2} e^{-2x} \right]_0^g = 2 \left(1 - e^{-2g} \right) \\ &\Rightarrow g = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2} \approx 0,3466. \end{aligned}$$

- b) Laut Definition ist

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^x f_X(u) \, du = \begin{cases} 1, & x > g \\ \int_0^x f_X(u) \, du, & 0 \leq x \leq g \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > g \\ 2(1 - e^{-2x}), & 0 \leq x \leq g \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Mit $0 < 0,1 < 0,2 < g$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(0,1 < X < 0,2) &= F_X(0,2) - F_X(0,1) \\ &= 2 \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{2}{10}} - \left(1 - e^{-2 \cdot \frac{1}{10}} \right) \right) = 2 \left(e^{-\frac{1}{5}} - e^{-\frac{2}{5}} \right) \approx 0,2968. \end{aligned}$$

- c) Die n -ten Momente einer Zufallsvariablen sind definiert als

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) \, dx.$$

Somit ergibt sich für die ersten beiden Momente

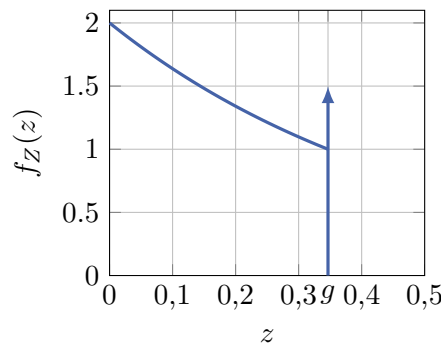
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^g x \cdot 4 \cdot e^{-2x} \, dx = \left[x \cdot \frac{4}{-2} \cdot e^{-2x} \right]_0^g - \int_0^g 1 \cdot \frac{4}{-2} \cdot e^{-2x} \, dx \\ &= -2 \cdot \left[x \cdot e^{-2x} \right]_0^g - \left[e^{-2x} \right]_0^g = 1 - (1 + 2g) \cdot e^{-2g} \\ &\stackrel{g=\ln \sqrt{2}}{=} 1 - (1 + \ln 2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} \approx 0,1534, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^g x^2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} dx = \left[x^2 \cdot \frac{4}{-2} \cdot e^{-2x} \right]_0^g - \int_0^g 2x \cdot \frac{4}{-2} \cdot e^{-2x} dx \\
&= -2 \cdot g^2 \cdot e^{-2g} + E(X) = -2 \cdot (\ln \sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} - (\ln \sqrt{2})^2 \approx 0,0333 .
\end{aligned}$$

Mithilfe des Verschiebungssatzes kann daraus die Varianz berechnet werden:

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} - (\ln \sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} - (\ln \sqrt{2})^2 - \frac{1}{4} + \ln \sqrt{2} - (\ln \sqrt{2})^2 \\
&= \frac{1}{4} - 2 \cdot (\ln \sqrt{2})^2 \approx 0,0097735 .
\end{aligned}$$

- d) **Hinweis:** Für die qualitative Skizze reicht eine beschränkte Exponentialverteilung plus Dirac-Puls bei g .



- e) Durch das Begrenzen ist $P(Z = g) = P(Y \geq g) = \int_g^\infty 2 \cdot e^{-2y} dy = e^{-2g} = \frac{1}{2}$. Diese Punktmasse an der Stelle g kann mithilfe der Dirac-Funktion $\delta(x)$ modelliert werden. Die Dichte von Z kann dann durch

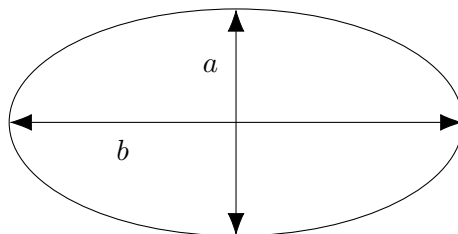
$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-2z} + \frac{1}{2} \cdot \delta(z - g), & 0 \leq z \leq g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden. Somit ist der Erwartungswert

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z) dz = \int_0^g z \cdot 2 \cdot e^{-2z} dz + \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta(z - g) dz \\
&= \int_0^g 2z \cdot e^{-2z} dz + g \cdot \frac{1}{2} \\
&= \left[z \cdot (-e^{-2z}) \right]_0^g - \int_0^g 1 \cdot (-e^{-2z}) dz + g \cdot \frac{1}{2} \\
&= -g \cdot e^{-2g} - \frac{1}{2} \left[e^{-2z} \right]_0^g + g \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} = 0,25 .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die Längen der Halbachsen a und b einer Ellipse



folgen der Verbundverteilung

$$f_{(A,B)}(a,b) = \begin{cases} \frac{2a^2}{b^3}, & a \in (0,1), \quad b > a \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie die Randdichte $f_A(a)$. Welche Verteilung ergibt sich? (2 Punkte)
 b) Berechnen Sie die Randdichte $f_B(b)$. (3 Punkte)

Hinweis: Eine Skizze des Definitionsbereiches von $f_{(A,B)}(a,b)$ ist hilfreich.

- c) Argumentieren Sie, ob die Zufallsvariablen A und B unabhängig sind. (2 Punkte)
 d) Bestimmen Sie die mittlere Fläche der Ellipse. (4 Punkte)

Hinweis: Die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist durch $\pi \cdot a \cdot b$ gegeben.

Für die folgende Teilaufgabe sei die Verbunddichte mit einem Parameter $\lambda > 0$ geändert zu:

$$f_{(A,B)}(a,b) = \begin{cases} \lambda a \cdot e^{-\lambda a - ba}, & a > 0, \quad b > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- e) Bestimmen Sie die *Wahrscheinlichkeitsdichte* der Fläche πAB der Ellipse. Berechnen Sie damit die mittlere Fläche dieser neuen Ellipse. (4 Punkte)

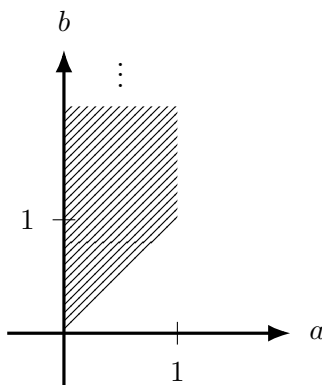
Lösung

- a) Für die Randdichte folgt für $a \in (0,1)$:

$$f_A(a) = \int_a^\infty \frac{2a^2}{b^3} db = \left[\frac{-a^2}{b^2} \right]_a^\infty = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Die Länge der Halbachse a folgt somit einer Gleichverteilung auf $[0,1]$.

- b) Der Definitionsbereich ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Damit ergibt sich für die Randdichte:

$$f_B(b) \stackrel{0 < b < 1}{=} \int_0^b \frac{2a^2}{b^3} da = \left[\frac{2}{3} \frac{a^3}{b^3} \right]_0^b = \frac{2}{3}$$

$$\stackrel{b \geq 1}{=} \int_0^1 \frac{2a^2}{b^3} da = \left[\frac{2}{3} \frac{a^3}{b^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \frac{1}{b^3}$$

c) Wegen

$$f_{(A,B)}(1, 0, 5) = 0 \neq 1 \cdot \frac{2}{3} = f_A(a) \cdot f_B(b)$$

sind die Zufallsvariablen nicht stochastisch unabhängig.

d) Direkte Rechnung ergibt den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(\pi AB) &= \pi \int_0^1 \int_a^\infty ab \cdot f_{(A,B)}(a, b) db da \\ &= \pi \int_0^1 \int_a^\infty ab \cdot \frac{2a^2}{b^3} db da \\ &= \pi \int_0^1 2a^3 \int_a^\infty \frac{1}{b^2} db da \\ &= \pi \int_0^1 2a^3 \left[-\frac{1}{b} \right]_a^\infty da \\ &= \pi \int_0^1 2a^3 \frac{1}{a} da \\ &= \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

e) **Lösung 1:** Unter Verwendung der Transformation

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \pi AB \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ \frac{V}{\pi U} \end{pmatrix} \implies \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{\pi u^2} & \frac{1}{\pi u} \end{pmatrix}$$

folgt mit $u, v > 0$:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{(A,B)}\left(u, \frac{v}{\pi u}\right) \\ &= \frac{1}{\pi u} \cdot \lambda u \cdot \exp\left(-\lambda u - \frac{uv}{\pi u}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \exp\left(-\lambda u - \frac{v}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Daraus entsteht die Randdichte:

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^\infty \frac{\lambda}{\pi} \exp\left(-\lambda u - \frac{v}{\pi}\right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{v}{\pi}\right) \cdot \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{v}{\pi}\right), \quad v > 0. \end{aligned}$$

Somit ist $V \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$ und damit die mittlere Fläche gerade $E(V) = \pi$.

Lösung 2: Unter Verwendung der Transformation

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi AB \\ B \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U}{\pi V} \\ V \end{pmatrix} \implies \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi v} & \frac{-u}{\pi v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt mit $u, v > 0$:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{(A,B)}\left(\frac{u}{\pi v}, v\right) \\ &= \frac{1}{\pi v} \cdot \frac{\lambda u}{\pi v} \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi v} - v \frac{u}{\pi v}\right) \\ &= \frac{\lambda u}{\pi^2 v^2} \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi v} - \frac{u}{\pi}\right) \end{aligned}$$

Daraus entsteht die Randdichte:

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_0^\infty \frac{\lambda u}{\pi^2 v^2} \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi v} - \frac{u}{\pi}\right) dv \\ &= \exp\left(-\frac{u}{\pi}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{\lambda u}{\pi^2 v^2} \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi v}\right) dv \\ &\stackrel{\tilde{v}=\frac{1}{v}}{=} \exp\left(-\frac{u}{\pi}\right) \cdot (-1) \int_0^\infty \frac{\lambda u}{\pi^2} \tilde{v}^2 \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi} \tilde{v}\right) d\tilde{v} \left(-\frac{1}{\tilde{v}^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{u}{\pi}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{\lambda u}{\pi} \exp\left(-\frac{\lambda u}{\pi} \tilde{v}\right) d\tilde{v} \end{aligned}$$

Der zweite Term kann als Integral über die Dichte einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda \frac{u}{\pi}$ interpretiert werden. Damit ist das Integral gleich 1 und die Randdichte wird

$$f_U(u) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{u}{\pi}\right), \quad u > 0.$$

Somit ist $U \sim \text{Exp}(\frac{1}{\pi})$ und damit die mittlere Fläche gerade $E(U) = \pi$.

Hinweis: Für den Erwartungswert gäbe es auch eine Lösung durch direkte Anwendung der Erwartungswertberechnung:

$$\begin{aligned} E(\pi AB) &= \pi \int_0^\infty \int_0^\infty ab \cdot f_{(A,B)}(a, b) da db \\ &= \pi \int_0^\infty \int_0^\infty ab \cdot \lambda a \cdot e^{-\lambda a - ba} da db \\ &= \pi \int_0^\infty \lambda a^2 e^{-\lambda a} \int_0^\infty b \cdot e^{-ba} db da \\ &= \pi \int_0^\infty \lambda a^2 e^{-\lambda a} \frac{1}{a^2} da \quad (\text{Tabelle}) \\ &= \pi \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda a} da \\ &= \pi \end{aligned}$$

Beachte, dass in der Aufgabenstellung aber explizit nach der Dichte der Fläche gefragt war.

Aufgabe 6

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Ein Kfz-Kennzeichen hat in Karlsruhe die Form KA – M – Z, wobei KA festgelegt ist, der Mittelteil M aus 1-2 Buchstaben in $\{A, \dots, Z\}$ ohne Umlaute ($\ddot{A}$, $\ddot{O}$, $\ddot{U}$) und die Zahl Z aus 1-4 stelligen Zahlen aus $\{0, 1, \dots, 9\}$ bestehen. Die führenden Stellen der Zahl sind hierbei nicht 0.

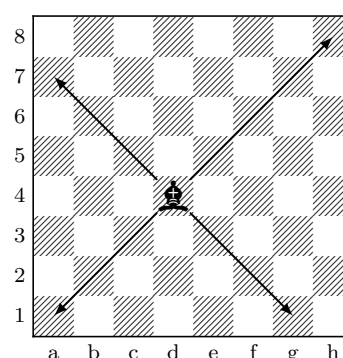
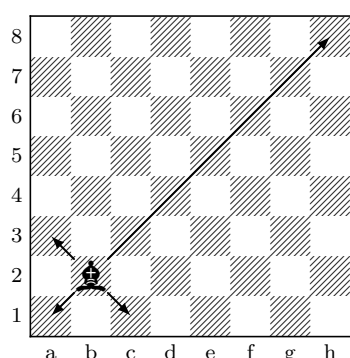
Bestimmen Sie, wie viele Kennzeichen es in Karlsruhe maximal geben kann. (4 Punkte)

- b) Beim Roulette wird eine Kugel in einem Roulettekessel gedreht und dadurch gleichverteilt eine Zahl aus $\{0, 1, \dots, 36\}$ bestimmt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind bei 4 unabhängigen Durchführungen eines Roulette-Spiels mindestens zwei Zahlen gleich? (4 Punkte)

- c) Gegeben ist ein Schachbrett mit 8×8 Feldern. Auf ein zufällig gleichverteilt gewähltes Feld der Hauptdiagonale (a1 - h8) wird ein schwarzer Läufer gestellt. Bestimmen Sie, wie viele Felder der Läufer im Erwartungswert erreichen kann. Das eigene Feld soll hierbei nicht mitgezählt werden. (3 Punkte)

Hinweis: Ein Läufer erreicht alle Felder auf seiner Haupt- und Nebendiagonalen. Zur Veranschaulichung sind im Folgenden zwei Beispiele dargestellt.



- d) Auf einem 8×8 -Schachbrett startet eine Maus auf dem Feld a1. Die Maus kann pro Schritt entweder ein Feld nach rechts oder ein Feld nach oben gehen.

Wie viele mögliche Wege gibt es für die Maus, um das Feld h8 zu erreichen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt ein solcher Weg über das Feld e3? (4 Punkte)

Lösung

- a) Für den Mittelteil gibt es $26 + 26^2 = 702$ Möglichkeiten, für die Zahl $9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 1000 = 9 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 9 \cdot 1111 = 9999$. Insgesamt kann es also $702 \cdot 9999 = 7019298$ Kennzeichen geben.

- b) Über das Gegenereignis ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 2 gleich}) &= 1 - P(\text{alle verschieden}) \\ &= 1 - \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{37^4} \\ &= 1 - \frac{1585080}{1874161} \\ &\approx 0,1542 \end{aligned}$$

- c) Die Fragestellung ist zu dem Mittelpunkt des Bretts symmetrisch. Da jede Position auf der Hauptdiagonalen gleichwahrscheinlich ist, folgt durch Abzählen der abgedeckten Felder:

$$\underbrace{2}_{\text{Symmetrie}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{Wkeit pro Feld}} \cdot \left(\underbrace{7+0}_{a1} + \underbrace{7+2}_{b2} + \underbrace{7+4}_{c3} + \underbrace{7+6}_{d4} \right) \\ = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10$$

- d) Von a1 zum Feld h8 sind 14 Schritte notwendig. Von diesen müssen 7 nach rechts und 7 nach oben ausgeführt werden, die Reihenfolge ist hierbei irrelevant. Dafür gibt es $\binom{14}{7} = 3432$ Möglichkeiten.

Um auf dem Weg das Feld e3 zu passieren, müssen in den ersten 6 Schritten genau 2 nach oben gehen. Anschließend müssen in 8 Schritten genau 3 nach rechts gehen. Insgesamt gibt es hierfür $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{3} = 15 \cdot 56 = 840$ Möglichkeiten. Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit (günstige Möglichkeiten durch Gesamtmöglichkeiten)

$$P(a1 \rightarrow e3 \rightarrow h8) = \frac{840}{3432} = 0,2448.$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) \, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{D.5})$$