

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
16.02.2023

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **17.03.2023** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **24.03.2023** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **29.03.2023** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (Punkte)

In einer Lotterie werden zufällig und ohne Zurücklegen sechs Kugeln aus einer Urne gezogen, die 49 nummerierte Kugeln (1 bis 49) enthält. Zusätzlich wird eine Superzahl aus den Zahlen 0 bis 9 gezogen. Die Reihenfolge der gezogenen Zahlen spielt keine Rolle. Für den Gewinn des Jackpots müssen alle Zahlen inklusive der Superzahl richtig getippt werden.

- a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an. Wie viele Elemente besitzt Ω ? (3 Punkte)

Es werden nur die 49 nummerierten Kugeln betrachtet, die Superzahl wird nicht betrachtet.

- b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl gezogener Zahlen an, deren Quersumme Q kleiner 5 ist. (3 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für mindestens drei aus sechs gezogenen Zahlen $Q < 5$ gilt. (3 Punkte)

Nun wird zusätzlich die Superzahl betrachtet.

- d) Bei vier aus sechs richtig getippten Zahlen erhält man einen Gewinn von $G_4 = 30\text{€}$, bei 5 Richtigen $G_5 = 5\,000\text{€}$ und bei 6 Richtigen $G_6 = 750\,000\text{€}$. In allen anderen Fällen wird kein Gewinn ausgezahlt. Mit der richtig getippten Superzahl verzehnfacht sich der jeweilige Gewinn. Wie hoch muss der Einsatz des Spiels sein, damit die Lotterie fair ist? (4 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in 100 unabhängigen Spielen genau zwei Mal den Jackpot zu gewinnen. (2 Punkte)

Lösung

- a) Der Ergebnisraum ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z &= \{1, 2, \dots, 49\}, \\ S &= \{0, 1, \dots, 9\}, \\ \Omega &= \{(z_1, z_2, \dots, z_6, s) \mid z_i \in Z \text{ für } i = 1, 2, \dots, 6; z_1 < z_2 < \dots < z_6; s \in S\}. \end{aligned}$$

Ohne Zurücklegen, Reihenfolge egal $\Rightarrow$ Kombinationen:

$$|\Omega| = \binom{|Z|}{6} \binom{|S|}{1} = \binom{49}{6} \binom{10}{1} = 13\,983\,816 \cdot 10 = 139\,838\,160$$

- b) Die Quersumme Q ist die Summe der Ziffern einer Zahl.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	

$\Rightarrow$ Es gibt 14 Zahlen mit $Q < 5$ in der Menge Z .

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der gezogenen Zahlen mit $Q < 5$. Diese folgt einer hypergeometrischen Verteilung mit $M = 14$, $N = 49$ und $n = 6$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{14}{k} \binom{35}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 6\}.$$

c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{i=0}^2 P(X = i) \\
 &= 1 - \sum_{i=0}^2 \frac{\binom{14}{i} \binom{35}{6-i}}{\binom{49}{6}} = 1 - \frac{\binom{14}{0} \binom{35}{6} + \binom{14}{1} \binom{35}{5} + \binom{14}{2} \binom{35}{4}}{\binom{49}{6}} \\
 &= 1 - \frac{1 \cdot 1\,623\,160 + 14 \cdot 324\,632 + 91 \cdot 52\,360}{13\,983\,816} = \frac{1\,651}{7\,567} = 0,218.
 \end{aligned}$$

d) Die Zufallsvariable Y beschreibe die Anzahl der richtig getippten Zahlen (6 aus 49). Mit $M = 6$, $N = 49$ und $n = 6$ gilt:

$$P(Y = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{k} \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 6\}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten für $k = 4, 5, 6$ richtig getippte Zahlen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
 P(Y = 4) &= \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{6-4}}{\binom{49}{6}} = \frac{645}{665\,896} = 9,686 \cdot 10^{-4}, \\
 P(Y = 5) &= \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{6-5}}{\binom{49}{6}} = \frac{43}{2\,330\,636} = 1,845 \cdot 10^{-5}, \\
 P(Y = 6) &= \frac{\binom{6}{6} \binom{43}{6-6}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} = 7,151 \cdot 10^{-8}.
 \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, die richtige Superzahl zu tippen gilt:

$$\begin{aligned}
 A_S &= \{\text{Superzahl richtig}\}, \\
 p = P(A_S) &= \frac{1}{|S|} = \frac{1}{10} \text{ und } P(\bar{A}_S) = 1 - P(A_S) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.
 \end{aligned}$$

Der zu erwartende Gewinn berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 E(G) &= 10 \cdot P(A_S) \cdot \sum_{k=4}^6 G_k \cdot P(Y = k) + P(\bar{A}_S) \cdot \sum_{k=4}^6 G_k \cdot P(Y = k) \\
 &= 10 \cdot \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=4}^6 G_k \cdot P(Y = k) + \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=4}^6 G_k \cdot P(Y = k) \\
 &= \left(1 + \frac{9}{10}\right) \cdot \sum_{k=4}^6 G_k \cdot P(Y = k) \\
 &= 1,9 \cdot \left(30\,€ \cdot 9,686 \cdot 10^{-4} + 5\,000\,€ \cdot 1,845 \cdot 10^{-5} + 750\,000\,€ \cdot 7,151 \cdot 10^{-8}\right) \\
 &= 0,332\,€.
 \end{aligned}$$

Damit die Lotterie fair ist, muss der Einsatz $0,332\,€$ betragen, da der zu erwartende Gewinn pro Spiel $E(G) = 0,332\,€$ ist.

e) Die Wahrscheinlichkeit, den Jackpot in einem Spiel zu gewinnen, ist:

$$p_J = P(Y = 6 \cap A_S) = p \cdot P(Y = 6) = 7,151 \cdot 10^{-9}$$

und damit ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $B = \{2 \text{ Jackpots aus } 100 \text{ Spielen}\}$:

$$P(B) = \binom{100}{2} p_J^2 (1 - p_J)^{100-2} = 2,531 \cdot 10^{-13}.$$

Aufgabe 2 (Punkte)

Die Population einer neuentdeckten Spezies kann durch drei Merkmale unterschieden werden: das *Muster* M (Streifen oder Punkte), die *Körpergröße* K (klein, mittelgroß oder groß) und die *Augenfarbe* A (blau oder rot). Wir wissen, dass ein gepunktetes Individuum nie klein ist und dass ein Gestreiftes nur groß oder klein ist, aber nie mittelgroß ist.

- a) Zeichnen Sie die zugehörige Baumdarstellung mit drei Ebenen, wobei die erste Ebene dem Muster, die zweite der Körpergröße und die dritte der Augenfarbe entspricht. Beschriften Sie alle Knoten und streichen Sie nicht erreichbare Übergänge. (4 Punkte)

Außerdem kommen kleine Individuen halb so oft vor wie mittelgroße und dreimal seltener als große Individuen. Von 24 Individuen sind 5 gepunktet, groß und rotäugig, wobei insgesamt 10 gepunktet und groß sind.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum groß ist, und anschließend, dass es groß und gestreift ist. (3 Punkte)
- c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Individuum rotäugig beziehungsweise blauäugig ist, wenn es gepunktet und groß ist. (3 Punkte)

Blauäugige Individuen kommen dreimal häufiger vor als rotäugige und unter allen rotäugigen Individuen ist eins von sechs gestreift und groß. Zudem gibt es keine rotäugigen Individuen, welche gestreift und klein sind, sowie keine Rotäugigen, welche gepunktet und mittelgroß sind.

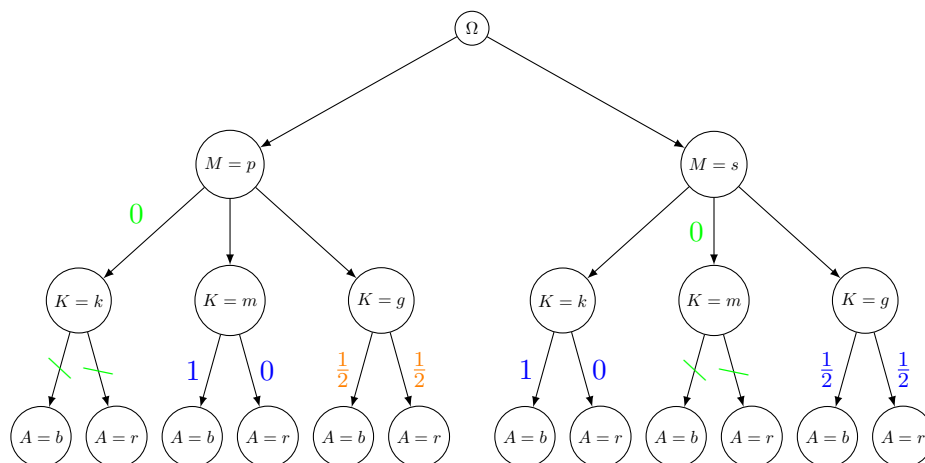
- d) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Individuum rot- beziehungsweise blauäugig ist, wenn es
- gestreift und groß ist,
 - gestreift und klein ist,
 - gepunktet und mittelgroß ist.

(5 Punkte)

Lösung

- a) Gefragt ist nach folgendem Baum ohne die farbigen Kantengewichte.

Notation: Muster M ist gepunktet p oder gestreift s ; Körpergröße K ist klein k , mittelgroß m oder groß g ; Augenfarbe A ist blau b oder rot r .



Unter der Annahme, dass es tatsächlich gepunktete und gestreifte Individuen gibt, muss die Übergangswahrscheinlichkeit von gepunktet nach klein, bzw von gestreift nach mittelgroß gleich null sein. Wenn ein Knoten nie erreicht wird, dann können auch alle nachfolgenden Knoten nie erreicht werden. Die Lösung ist in oberem Diagramm in grün.

- b) Mit $2P(K = k) = P(K = m)$ und $3P(K = k) = P(K = g)$ und aufgrund von $1 = P(K = k) + P(K = m) + P(K = g) = \frac{1}{3}P(K = g) + \frac{2}{3}P(K = g) + P(K = g)$ folgt

$$P(K = g) = \frac{1}{2}.$$

Mittels Marginalisierung $P(K = g, M = s) + P(K = g, M = p) = P(K = g) = \frac{1}{2}$ folgt

$$P(M = s, K = g) = P(K = g) - P(M = p, K = g) = \frac{1}{2} - \frac{10}{24} = \frac{1}{12}.$$

- c) Die Lösung ist in oberem Diagramm in orange.

Mit $P(M = p, K = g, A = r) = P(A = r|M = p, K = g) \cdot P(M = p, K = g) = \frac{5}{24}$

$$\Rightarrow P(A = r|M = p, K = g) = \frac{P(M = p, K = g, A = r)}{P(M = p, K = g)} = \frac{5 \cdot 24}{24 \cdot 10} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A = b|M = p, K = g) = 1 - P(A = r|M = p, K = g) = \frac{1}{2}.$$

- d) Die Lösung ist in oberem Diagramm in blau.

Aus $P(A = b) = 3P(A = r)$ und $P(A = b) + P(A = r) = 1$ ergibt sich $P(A = r) = \frac{1}{4}$ und $P(A = b) = \frac{3}{4}$. Damit folgt

$$P(A = r|M = s, K = g) = P(M = s, K = g|A = r) \cdot \frac{P(A = r)}{P(M = s, K = g)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1 \cdot 12}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$P(A = b|M = s, K = g) = 1 - P(A = r|M = s, K = g) = \frac{1}{2}.$$

Da $P(K = k) = \underbrace{P(K = k, M = p)}_{=0} + P(K = k, M = s) = P(K = k, M = s)$ und somit

$P(K = k, M = s) = \frac{1}{3}P(K = g) = \frac{1}{6} \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A = r|M = s, K = k) &= \frac{P(A = r, M = s, K = k)}{P(M = s, K = k)} \\ &\stackrel{=0 \text{ aus Aufgabenstellung}}{=} \frac{\overbrace{P(M = s, K = k|A = r)} P(A = r)}{P(M = s, K = k)} = 0. \end{aligned}$$

Außerdem folgt daraus: $P(A = b|M = s, K = k) = 1 - P(A = r|M = s, K = k) = 1$.

Analog: $P(A = r|M = p, K = m) = 0$ und $P(A = b|M = p, K = m) = 1$.

Aufgabe 3 (Punkte)

Ein Freizeitpark besitzt ein 4D-Kino, in dem täglich eine Vormittagsvorstellung sowie eine Nachmittagsvorstellung stattfinden. Es ist bekannt, dass jeder der N Gäste des Freizeitparks genau eine der beiden Vorstellungen besucht und mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % in die Vormittagsvorstellung geht. Es wird außerdem angenommen, dass die Besucher des Freizeitparks unabhängig voneinander entscheiden zu welcher Vorstellung sie gehen. Die Anzahl der Sitzplätze im Kino ist $0,7 \cdot N$.

- a) Die Zufallsvariable X_N beschreibt die Anzahl der Besucher, die zur Nachmittagsvorstellung kommen. Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt X_N ? Geben Sie den Erwartungswert $E(X_N)$ an. (2 Punkte)
- b) Es sei $N = 10$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Hälfte der Besucher in die Nachmittagsvorstellung geht? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Besucher der Nachmittagsvorstellung einen Sitzplatz bekommen? (3 Punkte)
- c) Für große N kann X_N durch eine poissonverteilte Zufallsvariable $\tilde{X}_N$ approximiert werden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\tilde{X}_N$ an. Berechnen Sie für $\tilde{X}_N$ und $N = 10$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau die Hälfte der Besucher in die Nachmittagsvorstellung kommen. (4 Punkte)
- d) Eine alternative Approximation von X_N für große N bietet der zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace. Berechnen Sie mit dessen Hilfe die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 6 bis 10 der insgesamt $N = 10$ Besucher in die Nachmittagsvorstellung kommen. Ist die Approximation praktisch zulässig? (4 Punkte)
- e) Berechnen Sie für den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nicht alle Besucher der Nachmittagsvorstellung einen Sitzplatz bekommen. (2 Punkte)

Lösung

- a) Die Zufallsvariable X_N folgt einer Binominalverteilung $X \sim \text{Bin}(N, p)$ mit $p = 1 - 0,3 = 0,7$. Der Erwartungswert ist $E(X_N) = pN = 0,7 \cdot N$.
- b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau die Hälfte der Besucher in die Nachmittagsvorstellung kommen, ist

$$P(X_{N=10} = N/2 = 5) = \binom{N}{N/2} p^{N/2} (1-p)^{N-N/2} = \binom{10}{5} 0,7^5 0,3^5 = 0,103.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Besucher der Nachmittagsvorstellung einen Sitzplatz bekommen ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 7 Besucher zur Nachmittagsvorstellung kommen, also

$$P(X_{N=10} \geq 8) = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 0,233 + 0,121 + 0,028 = 0,382.$$

- c) Mit $\lambda = pN$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion der Poissonverteilung zu

$$P(\tilde{X}_N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(pN)^k}{k!} e^{-pN}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau die Hälfte der Besucher in die Nachmittagsvorstellung kommen, berechnet sich unter der Annahme einer Poissonverteilung zu

$$P(\tilde{X}_{N=10} = 5) = \frac{(pN)^k}{k!} e^{-pN} = \frac{(0,7 \cdot 10)^5}{5!} e^{-0,7 \cdot 10} = 0,128.$$

- d) Sei B_n für $n = 1, \dots, N$ die Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, dass der Besucher n die Nachmittagsvorstellung besucht, sodass $X_N = B_1 + B_2 + \dots + B_N$ die Summe dieser unabhängigen aber identisch verteilten Zufallsvariablen beschreibt. Der zentrale Grenzwertsatz nach de Moivre-Laplace besagt, dass die Verteilungsfunktion der standardisierten Zufallsvariablen $Z_N = \frac{X_N - NE(B_n)}{\sqrt{NV(B_n)}}$ für $N \rightarrow \infty$ gegen die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung konvergiert. Mit $E(B_n) = p = 0,7$ und $V(B_n) = p(1 - p)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P(6 \leq X_N \leq 10) &= P\left(\frac{6 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}} \leq \frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}} \leq \frac{10 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{6 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}} \leq Z_N \leq \frac{10 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{10 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}}\right) \\ &= \Phi(2,07) - \Phi(-0,69) = \Phi(2,07) - (1 - \Phi(0,69)) \\ &\approx 0,980 - (1 - 0,752) = 0,732. \end{aligned}$$

Die Approximation ist praktisch zulässig wenn $V(X_N) = Np(1 - p) \geq 9$ gilt. Mit $N = 10$ ergibt sich $10 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 2,1 \not\geq 9$. Die Approximation ist also nicht praktisch zulässig.

- e) Für $N \rightarrow \infty$ kann erneut der zentrale Grenzwertsatz genutzt werden:

$$\begin{aligned} P(X_N > \text{Anzahl Plätze im Kino}) &= P(X_N > pN) \\ &= P\left(\frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}} > \frac{pN - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X_N - Np}{\sqrt{Np(1 - p)}} > 0\right) = 0,5. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Punkte)

Gegeben sei eine stetige reellwertige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{1}{12}, & -a \leq x \leq a, \quad a \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}_+$. (3 Punkte)

Hinweis: Rechnen Sie im Folgenden mit $a = 2$ weiter.

- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$. (3 Punkte)

Eine andere Zufallsvariable Y sei durch die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_X(y), & y < b \\ 1, & y \geq b \end{cases}$$

charakterisiert. Dabei ist $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion von X und es gilt $b > a$.

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_Y(y)$ und skizzieren Sie diese. (4 Punkte)
d) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y)$ und die Varianz $V(Y)$. (3 Punkte)
e) Geben Sie jeweils ein p -Quantil von Y für $p = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{1}{4}$ an. (2 Punkte)

Lösung

- a) Die Normiertheitsbedingung von Wahrscheinlichkeitsdichten fordert

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 2 \int_0^a \left(\frac{x^2}{8} + \frac{1}{12} \right) dx = 2 \left[\frac{x^3}{24} + \frac{x}{12} \right]_0^a = \frac{a^3}{12} + \frac{a}{6} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{12}(a-2)(a^2+2a+6) \\ \Leftrightarrow a &= 2. \end{aligned}$$

$f_X(x)$ ist also nur mit $a = 2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

- b) Durch die Symmetrie $f_X(-x) = f_X(x)$ ergibt sich für den Erwartungswert:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{12} \right) dx + \int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{12} \right) dx = - \int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{12} \right) dx + \int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{12} \right) dx = 0,$$

da insbesondere das Integral $\int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x}{12} \right) dx$ und damit der Erwartungswert existiert. Die Varianz berechnet sich zu

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx = 2 \int_0^{a=2} x^2 \left(\frac{x^2}{8} + \frac{1}{12} \right) dx = 2 \left[\frac{x^5}{40} + \frac{x^3}{36} \right]_0^2 = \frac{92}{45}.$$

- c) Die Verteilungsfunktion von X kann aus der Stammfunktion von $f_X(x)$ bestimmt werden:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{x^3}{24} + \frac{x}{12} + 0,5, & -2 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

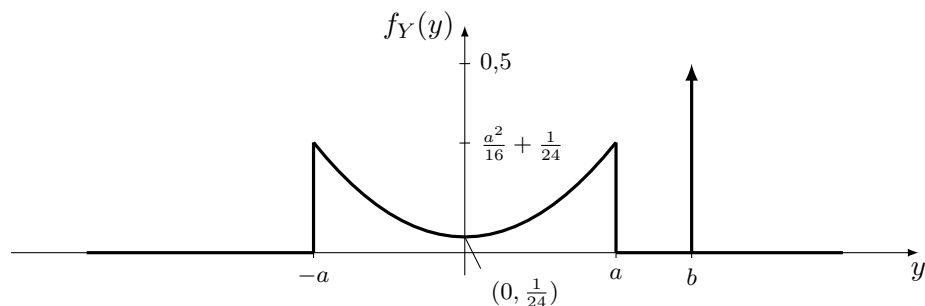
Die Konstante 0.5 ergibt sich aus der Normiertheitsbedingung $F_X(x = a) = 1$. Damit gilt für die Verteilungsfunktion von Y :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{y^3}{12} + \frac{y}{6} + 1 \right), & -2 \leq y < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq y < b \\ 1, & y \geq b \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ hat also bei $y = b$ eine Sprungstelle von 0,5 auf 1,0. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y ergibt sich damit zu

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{16} + \frac{1}{24}, & -2 \leq y \leq 2 \\ \frac{1}{2} \delta(y - b), & y = b \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\delta(x)$ die δ -Distribution bezeichnet.



d) Der Erwartungswert von Y ist

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \underbrace{\int_{-2}^2 y \left(\frac{y^2}{16} + \frac{1}{24} \right) dy}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} y \delta(y - b) dy = \frac{b}{2}.$$

Die Varianz von Y ist

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \\ &= \int_{-a}^a y^2 \left(\frac{y^2}{16} + \frac{1}{24} \right) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \delta(y - b) dy - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} E(X^2) + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ &= \frac{92}{90} + \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

e) Ein Wert y_p , für den $P(Y < y_p) \leq p$ und $P(Y > y_p) \leq 1 - p$ gilt, heißt p -tes Quantil. Demnach ist jeder Wert im Intervall $[a, b) = [2, b)$ ein $p = \frac{1}{2}$ -Quantil. Das einzige $p = \frac{1}{4}$ -Quantil liegt, aufgrund der Symmetrie von $f_X(x)$ um 0, bei $y_{p=\frac{1}{4}} = 0$.

Aufgabe 5 (Punkte)

Gegeben ist die Verbunddichte zweier Zufallsvariablen (X, Y) gemäß:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2}, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich der Verbunddichte. (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie beide Randdichten. (2 Punkte)
- c) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von Y unter der Bedingung $X = x$. Berechnen Sie damit den bedingten Erwartungswert $E(Y|X = x)$. (3 Punkte)
- d) Argumentieren Sie mittels zwei unterschiedlicher Begründungen, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind. (2 Punkte)
- e) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y . (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- f) Gegeben sind zwei unabhängige, jeweils auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen X und Y . Berechnen Sie die gemeinsame Dichte von U und V bei Verwendung der Transformation:

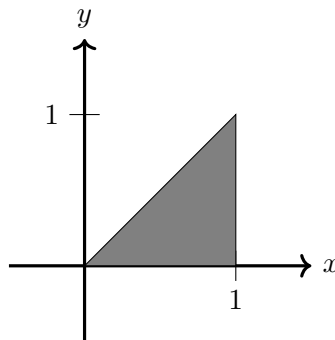
$$U = \sqrt{-2 \ln(X)}$$

$$V = 2\pi Y$$

(4 Punkte)

Lösung

- a) Der Definitionsbereich ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



- b) Die Randdichten ergeben sich durch Rechnung: (beachten Sie die Integrationsbereiche)

$$f_X(x) = \int_0^x f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \int_0^x \frac{2y}{x^2} \, dy = \frac{2}{x^2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^x = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 f_{(X,Y)}(x, y) \, dx = \int_y^1 \frac{2y}{x^2} \, dx = 2y \left[-\frac{1}{x} \right]_y^1 = 2 - 2y, \quad 0 < y < 1.$$

- c) Für die bedingte Dichte ergibt sich für $0 < x < 1$:

$$f_{Y|X=x}(y|X=x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2y}{x^2}.$$

Für den bedingten Erwartungswert folgt für $0 < x < 1$:

$$E(Y|X=x) = \int_0^x y f_{Y|X=x}(y|X=x) \, dy = \int_0^x \frac{2y^2}{x^2} \, dy = \frac{2}{x^2} \frac{1}{3} x^3 = \frac{2}{3} x.$$

- d) 1. Durch Gegenbeispiel folgt $f_{(X,Y)}(0.25, 0.5) = 0 \neq 1 \cdot 1 = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, sodass die Zufallsvariablen nicht unabhängig sind.
 2. Aus der zweiten Teilaufgabe ergibt sich:

$$f_{Y|X=x}(y|X=x) = \frac{2y}{x^2} \neq 2 - 2y = f_Y(y)$$

(... von den Definitionsbereichen der Dichten ganz zu schweigen ...)

- e) Für die Korrelation berechnet man folgenden Wert:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \int_0^x xy f_{(X,Y)}(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x xy \frac{2y}{x^2} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{x} \int_0^x y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{2}{x} \frac{1}{3} x^3 \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 \, dx = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte ergeben sich aus den berechneten Randdichten:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2} \\ E(Y) &= \int_0^1 y(2 - 2y) \, dy = \left[y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

sodass die Kovarianz lautet:

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

- f) Die inverse Transformation lautet:

$$\begin{aligned} X &= e^{-\frac{1}{2}U^2}, \\ Y &= \frac{1}{2\pi}V. \end{aligned}$$

Damit folgt die Jacobi-Determinante zu:

$$\begin{aligned} |\det(\mathcal{J})| &= \left| \det \begin{pmatrix} -ue^{-\frac{1}{2}u^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{2\pi} ue^{-\frac{1}{2}u^2} \right|. \end{aligned}$$

Die Dichte der transformierten Größen ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u, v) &= |\det(\mathcal{J})| \cdot f_{(X,Y)}\left(e^{-\frac{1}{2}u^2}, \frac{1}{2\pi}v\right) \\ &= \frac{u}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}u^2}. \end{aligned}$$

Die Bereichsgrenzen ergeben sich durch $0 < x < 1$ und $0 < y < 1$ zu

$$\begin{aligned} 0 &< e^{-\frac{1}{2}u^2} < 1, \\ 0 &< v < 2\pi. \end{aligned}$$

Damit können die Werte $u \in \mathbb{R}_{>0}$ und $v \in (0, 2\pi)$ sein. Man kann erahnen, dass U und V den Polarkoordinaten entsprechen könnten. Damit hätte man eine Verteilung, die bzgl. des Winkels gleichverteilt und bzgl. der Amplitude Rayleigh-verteilt ist. Das entspricht einer zweidimensionalen Normalverteilung mit unabhängigen Komponenten.

Aufgabe 6 (Punkte)

Sie beobachten den folgenden stochastischen Prozess $X(t)$: Ein Ihnen unbekanntes radioaktives Isotop emittiert α -Strahlung, wobei die Zerfallskonstante λ die Anzahl der emittierten α -Teilchen pro Zeittakt beschreibt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Messreihe gestartet. Die Zufallsvariable $X(t)$ beschreibt die Anzahl der bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ emittierten α -Teilchen.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X(t)$. Um welche Verteilung handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)
- Handelt es sich bei dem beschriebenen Prozess um einen ergodischen Prozess? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Die Zeit T , die zwischen zwei radioaktiven Zerfallszeitpunkten vergeht, in denen jeweils ein α -Teilchen emittiert wird, kann als exponentialverteilt angenommen werden:

$$T \sim \text{Exp}(\lambda).$$

- Berechnen Sie die mittlere Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Zerfallszeitpunkten. (3 Punkte)
- Die Halbwertszeit berechnet sich zu $T_{1/2} = \ln(2)E(T)$. Angenommen die Zerfallskonstante ist $\lambda = 2,31 \cdot 10^{-2} \text{ Jahr}^{-1}$, um welches der in Tabelle ?? gezeigten Isotope handelt es sich? (3 Punkte)

Isotop	:	Iod-131	Cäsium-137	Plutonium-239	Uran-235
Halbwertszeit	:	8 Tage	30 Jahre	24.110 Jahre	$7,03 \cdot 10^7$ Jahre

Tabelle 1: Halbwertszeiten verschiedener radioaktiver Isotope.

- Angenommen bei einer Messung werden in 24 Stunden 180 emittierte α -Teilchen detektiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5% der gemessenen α -Teilchen in den letzten 30 Minuten der Messung detektiert wurden. (4 Punkte)

Lösung

- Der beschriebene stochastische Prozess ist ein typischer Zählprozess, dessen Zuwachs, die Anzahl der emittierten α -Teilchen λ bis zur Zeit t , Poisson-verteilt ist. Es handelt sich folglich um einen Poisson-Prozess und die Zufallsvariable $X(t)$ ist Poisson-verteilt mit Parameter λt für $t \geq 0$:

$$P(X(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

- Der Prozess ist ein Zählprozess, d.h. die Summe der emittierten α -Teilchen wird mit jedem weiteren emittierten α -Teilchen größer. Der Erwartungswert des Prozesses kann demnach nicht konstant sein, sondern ist zeitabhängig. Folglich ist der Prozess nicht stationär. Da Stationarität eine Voraussetzung für Ergodizität ist, kann der Prozess nicht ergodisch sein.
- Laut Aufgabenstellung ist die Zeit T exponentialverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch:

$$f_T(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \tau}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Die mittlere Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Zerfallsprozessen ist der Erwartungswert von T und wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau f_T(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = \lambda \int_0^{\infty} \tau e^{-\lambda \tau} d\tau \stackrel{\text{Anh. B}}{=} \lambda \left[\frac{e^{-\lambda \tau}}{\lambda^2} (-\lambda \tau - 1) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda^2} \left[-\tau e^{-\lambda \tau} - e^{-\lambda \tau} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} (0 - (-1)) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

d) Mit $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ und $\lambda = 2,31 \cdot 10^{-2} \text{ Jahr}^{-1}$ folgt:

$$T_{1/2} = \ln(2) E(T) = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{2,31 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{Jahr}}} \approx 30 \text{ Jahre.}$$

Nach Vergleich mit den Halbwertszeiten der Isotope in Tabelle ?? muss das unbekannte Material Cäsium-137 sein.

e) Die Emission der α -Teilchen erfolgt während der Messung, also im Intervall von 0 bis 24 Stunden, gleichverteilt und unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen α -Teilchens während der letzten 30 Minuten der Messung emittiert zu werden, beträgt daher $p = \frac{30}{60} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$.
Für 5% der $N = 180$ emittierten α -Teilchen, also $k = 0,05 \cdot 180 = \frac{1}{20} \cdot 180 = 9$, folgt mit der Binomialverteilung:

$$\begin{aligned} P\left(X\left(\frac{1}{2}\right) = 9 \mid X(24) = 180\right) &= \binom{180}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^{180-9} \\ &= \binom{180}{9} \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{1}{48}\right)^{171} \\ &\approx 9,010 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) \, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{D.5})$$