

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
15.02.2024

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Beachten Sie, dass in Aufgabe 6 zwischen zwei Aufgaben gewählt werden muss. **Bearbeiten Sie entweder Aufgabe 6.1 oder Aufgabe 6.2!**

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der **Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar** sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind **ein** beidseitig handschriftlich beschriebenes **A4-Blatt** (kein formatiertes Dokument, wie LaTeX, Word, etc.) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **14.03.2024** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **21.03.2024** statt. Weitere Informationen finden Sie auf der Webseite des Instituts. Die mündliche Nachprüfung findet am **04.04.2024** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

In einer Urne befinden sich 7 Kugeln, von denen 4 weiße Kugeln und 3 schwarze Kugeln sind. Für schwarze Kugeln erhält man 1 Punkt und für weiße Kugeln erhält man 2 Punkte.

- a) Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Was ist der Ergebnisraum Ω , wenn die insgesamt erhaltenen Punkte als Ergebnis des Wahrscheinlichkeitsexperiments betrachtet werden? Wie lauten die Wahrscheinlichkeiten für jedes Ergebnis? Und wie lautet die σ -Algebra? (5 Punkte)
- b) Nun werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 gezogene Kugeln weiß und 1 gezogene Kugel schwarz ist? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Nun werden alle 7 Kugeln zufällig von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, wobei verschiedene Kugeln derselben Farbe als nicht unterscheidbar behandelt werden.

- c) Wie viele Möglichkeiten zur Anordnung gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)
- d) Berechnen Sie die Anzahl der Anordnungen, in denen keine zwei schwarzen Kugeln direkt nebeneinander liegen. Begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)
- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei schwarze Kugeln direkt nebeneinander liegen? (1 Punkt)

Lösung

- a) Für eine schwarze Kugel und eine weiße Kugel erhält man 3 Punkte. Für zwei schwarze Kugeln erhält man 2 Punkte. Für zwei weiße Kugeln erhält man 4 Punkte. Die Ergebnisse sind somit

$$\Omega = \{2, 3, 4\}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird wie folgt berechnet:

$$P(2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

$$P(4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

$$P(3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7}.$$

Weil der Ergebnisraum endlich ist, kann als σ -Algebra die Potenzmenge gewählt werden und die Potenzmenge lautet:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

- b) Unter Verwendung der hypergeometrischen Verteilung können wir berechnen

$$P = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{6 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35}.$$

- c) Zunächst wissen wir, dass es Π_7 Anzahl von Kombinationen gibt, um 7 unterscheidbare Kugeln zufällig anzuordnen.

Da Kugeln derselben Farbe als identisch behandelt werden, müssen wir die Gesamtanzahl der Kombinationen durch die Anzahl der wiederholten Kombinationen teilen, welche $\Pi_3 \cdot \Pi_4$ beträgt. Daher ist die Gesamtanzahl der Anordnungen

$$\frac{\Pi_7}{\Pi_4 \cdot \Pi_3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

- d) Zuerst platzieren wir die vier weißen Kugeln in einer Reihe.



Um sicherzustellen, dass keine schwarzen Kugeln nebeneinander platziert werden, sollten die 3 schwarzen Kugeln in die 5 freien Plätze zwischen den weißen Kugeln so verteilt werden, dass keine zwei schwarzen Bälle am gleichen Platz liegen. Daher gibt es $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten.

- e) Da “mindestens zwei schwarze Kugeln direkt nebeneinander platziert sind” das Gegenteil von “keine zwei schwarzen Kugeln direkt nebeneinander platziert sind” ist, kann die Wahrscheinlichkeit des Ersteren wie folgt berechnet werden:

$$P = 1 - \frac{10}{35} = \frac{25}{35}.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Die Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \frac{1}{10} e^{-\frac{|x-\gamma|}{5}} \quad \text{für } -\infty < x < \infty \text{ und } \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Skizzieren Sie $f_X(x)$ qualitativ und markieren Sie in Ihrer Skizze Median, Modalwert sowie den Wert von $f_X(x)$ an den jeweiligen Stellen quantitativ. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $Y = (X - \gamma)^2$. (5 Punkte)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(|X| > \frac{1}{7})$ und $P(X < -\frac{1}{7})$ für den Fall $\gamma = 0$. (3 Punkte)

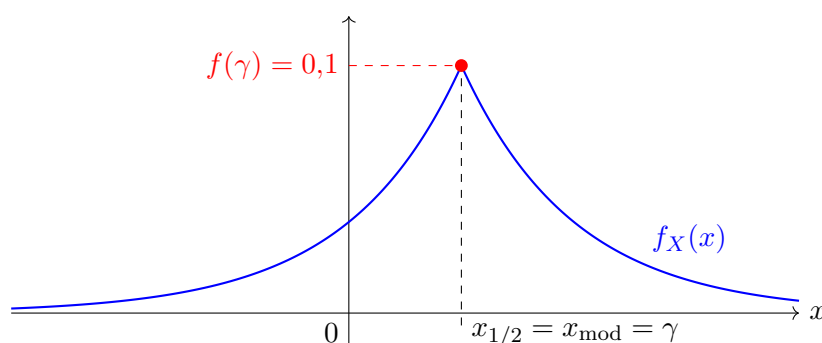
Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- Nennen Sie die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. (4 Punkte)

Lösung

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ ist um γ nach rechts verschoben und symmetrisch zu $x = \gamma$. Aufgrund der Symmetrie ist der Median $x_{1/2} = \gamma$ mit $f_X(\gamma) = 1/10$. Der Modalwert/Modus ist ebenfalls $x_{\text{mod}} = \arg \max_x f_X(x) = \gamma$.

Skizze von $f_X(x)$:



- Zunächst wird die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ berechnet:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \frac{1}{10} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{|u-\gamma|}{5}} du$$

Fallunterscheidung aufgrund des Betrags:

$$x \leq \gamma : F_X(x) = \frac{1}{10} \int_{-\infty}^x e^{\frac{u-\gamma}{5}} du = \frac{1}{10} \left[5e^{\frac{u-\gamma}{5}} \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^{\frac{x-\gamma}{5}}$$

$$x > \gamma : F_X(x) = F_X(\gamma) + \frac{1}{10} \int_{\gamma}^x e^{-\frac{u-\gamma}{5}} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \left[-5e^{-\frac{u-\gamma}{5}} \right]_{\gamma}^x = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\gamma}{5}}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\gamma}{5}}, & \text{für } x \leq \gamma \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\gamma}{5}}, & \text{für } x > \gamma. \end{cases}$$

Nun wird die Verteilungsfunktion von Y berechnet:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X - \gamma)^2 \leq y) \stackrel{y \geq 0}{=} P(\gamma - \sqrt{y} \leq X \leq \gamma + \sqrt{y})$$

$$= F_X(\gamma + \sqrt{y}) - F_X(\gamma - \sqrt{y})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{(\sqrt{y}+\gamma)-\gamma}{5}} \right) - \frac{1}{2} e^{\frac{(-\sqrt{y}+\gamma)-\gamma}{5}} = 1 - e^{-\frac{\sqrt{y}}{5}}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\sqrt{y}}{5}}, & \text{für } y \geq 0 \\ 0, & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

- c) Für $\gamma = 0$ ist $f_X(x)$ symmetrisch zur y -Achse; es gilt $f_X(-x) = f_X(x)$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist:

$$\begin{aligned} P\left(|X| > \frac{1}{7}\right) &= P\left(X < -\frac{1}{7}\right) + P\left(X > \frac{1}{7}\right) = 2P\left(X < -\frac{1}{7}\right) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{-\frac{1}{7}} \frac{1}{10} e^{\frac{x}{5}} dx = \left[e^{\frac{x}{5}} \right]_{-\infty}^{-\frac{1}{7}} = e^{-\frac{1}{35}} \approx 0,972. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P\left(X < -\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}P\left(|X| > \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{35}} \approx 0,486$.

- d) Eigenschaften einer Verteilungsfunktion:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- Monoton nicht fallend: $x_1 \leq x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$
- Rechtsseitig stetig: $F(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Gegeben ist die Verbunddichte zweier Zufallsvariablen (X, Y) gemäß:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha x \cdot e^{-2x-yx}, & 0 < x, 0 < y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Parameter $\alpha > 0$.

- a) Bestimmen Sie den Parameter α . (2 Punkte)
- b) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x), f_Y(y)$. (4 Punkte)
- c) Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_Y(y|X=x)$. Argumentieren Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind. (3 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- d) Bestimmen Sie die Korrelation von X und Y . (3 Punkte)
- e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariable $Z := \ln(X)$. (3 Punkte)

Lösung

- a) Der Parameter α ergibt sich durch Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, d(x, y) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha x \cdot e^{-2x-yx} \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-2x} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-yx} \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-2x} \cdot 1 \, dx \\ &= \left[-\frac{\alpha}{2} e^{-2x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\alpha}{2} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\alpha = 2$.

- b) Für $x > 0$ ergibt sich die Randdichte:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy \\ &= \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-2x-yx} \, dy \\ &= 2e^{-2x} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-yx} \, dy \\ &= 2e^{-2x} \cdot 1 = 2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Für $x \leq 0$ gilt $f_X(x) = 0$. Es handelt sich um eine Exponentialverteilung.

Für $y > 0$ ergibt sich die Randdichte:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx \\ &= \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-2x-yx} \, dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x(2+y)} \, dx \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Gleichung (C.2) folgt

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= 2 \left[\frac{e^{-x(2+y)}}{(2+y)^2} \cdot (-x(2+y) - 1) \right]_0^\infty \\ &= \frac{2}{(2+y)^2} \end{aligned}$$

Für $y \leq 0$ gilt $f_Y(y) = 0$.

c) Die bedingte Dichte ist:

$$f_Y(y|X=x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2x \cdot e^{-2x-yx}}{2e^{-2x}}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} x \cdot e^{-yx}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Durch Gegenbeispiel folgt $f_{(X,Y)}(1,1) = 2 \cdot e^{-3} \neq e^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 2e^{-2} = f_X(1) \cdot f_Y(1)$, sodass die Zufallsvariablen nicht unabhängig sind.

Alternative Lösung: Für $x, y > 0$:

$$f_Y(y|X=x) = x \cdot e^{-yx} \neq \frac{2}{(2+y)^2} = f_Y(y),$$

sodass die Zufallsvariablen nicht unabhängig sind.

d) Die Erwartungswerte ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{(X,Y)}(x,y) \, d(x,y) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy \cdot 2xe^{-2x-yx} \, dy \\ &= \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} \int_0^{\infty} y \cdot xe^{-yx} \, dy \, dx \end{aligned}$$

Das zweite Integral entspricht dem ersten Moment einer Exponentialverteilung mit Parameter x . Daher gilt

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^{\infty} xe^{-2x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} 2e^{-2x} \, dx = 1. \end{aligned}$$

e) Durch Äquivalenzumformungen ergibt sich für $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\ln(X) \leq z) \\ &= P(X \leq e^z) \\ &= F_X(e^z). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Kettenregel folgt somit

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{d}{dz} F_Z(z) \\ &= f_X(e^z) \cdot e^z \\ &= 2 \cdot e^{-2 \cdot e^z} \cdot e^z, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein Eiscafé führt eine Marktanalyse durch. Hierzu wird eine große Anzahl von Personen befragt. Das Ergebnis lautet: 60% der Personen bestellen Erdbeereis ($P(E) = 0,6$), 50% der Personen bestellen Schokoladeneis ($P(S) = 0,5$) und 30% der Personen bestellen keines von beiden ($P(\bar{E} \cap \bar{S}) = 0,3$).

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person sowohl Erdbeereis als auch Schokoladeneis bestellt? (3 Punkte)
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die Schokoladeneis bestellt, auch Erdbeereis bestellt? (3 Punkte)

Es stellt sich außerdem heraus, dass 80% der Personen Käsekuchen bestellen ($P(K) = 0,8$) und 48% der Personen sowohl Erdbeereis als auch Käsekuchen bestellen.

- c) Sind das Bestellen von Erdbeereis und das Bestellen von Käsekuchen unabhängige Ereignisse? (3 Punkte)
- d) Sind das Bestellen von Käsekuchen und das Nicht-Bestellen von Erdbeereis unabhängige Ereignisse? (2 Punkte)
- e) Nun wird ein zweistufiges Zufallsexperiment durchgeführt. Zuerst wird eine Person zufällig ausgewählt und gefragt, ob sie Käsekuchen mag. Wenn die Antwort ja lautet, wirft die Person eine manipulierten Münze, bei der eine Wahrscheinlichkeit von 70% für Zahl besteht. Wenn die Antwort nein lautet, wirft die Person eine manipulierten Münze, bei der eine Wahrscheinlichkeit von 20% für Zahl besteht. Falls eine Person Kopf wirft, erhält sie 2 Euro, ansonsten erhält sie einen kostenlosen Käsekuchen.

Eine Person ist glücklich, wenn sie Käsekuchen mag und einen Käsekuchen erhält oder wenn sie keinen Käsekuchen mag und 2 Euro erhält, andernfalls ist die Person unglücklich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person glücklich ist? Zeichnen Sie eine Baumdarstellung und berechnen Sie damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit. (4 Punkte)

Lösung

- a) Die Wahrscheinlichkeit kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} P(E \cap S) &= P(E) + P(S) - P(E \cup S) \\ &= P(E) + P(S) + (1 - P(\bar{E} \cup \bar{S})) \\ &= P(E) + P(S) + (1 - P(\bar{E} \cap \bar{S})) \\ &= 0,6 + 0,5 - (1 - 0,3) \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

- b) Die Wahrscheinlichkeit kann mithilfe der Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten berechnet werden als

$$P(E|S) = \frac{P(ES)}{P(S)} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8.$$

- c) Um festzustellen, ob zwei Ereignisse unabhängig voneinander sind, können wir überprüfen, ob $P(K)P(E) = P(KE)$ oder $P(K|E) = P(K)$ erfüllt ist. Zuerst berechnen wir

$$P(K|E) = \frac{P(KE)}{P(E)} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8.$$

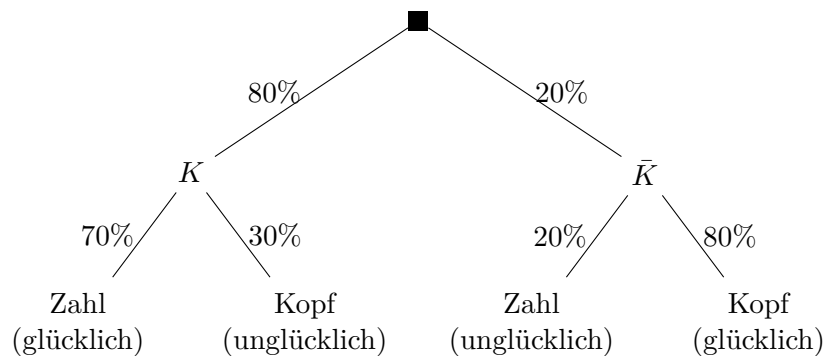
Wir sehen, dass es gleich $P(K)$ ist. Daher ist das Bestellen von Erdbeereis unabhängig vom Bestellen von Käsekuchen.

d) Wir überprüfen, ob $P(K)P(\bar{E}) = P(K\bar{E})$ erfüllt ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} P(K)P(\bar{E}) &= P(K)(1 - P(E)) \\ &= P(K) - P(K)P(E) \\ &\stackrel{(1)}{=} P(K) - P(KE) \\ &\stackrel{(2)}{=} P(K\bar{E}), \end{aligned}$$

wobei Gleichheit (1) gilt, weil K und E unabhängig sind, und Gleichheit (2) aus der Definition der komplementären Ereignisse folgt. Wegen $P(K)P(\bar{E}) = P(K\bar{E})$ wissen wir, dass das Bestellen von Käsekuchen unabhängig vom Nicht-Bestellen von Erdbeereis ist.

e) Die Baumdarstellung des zweistufigen Zufallsexperiments ist wie folgt skizziert:

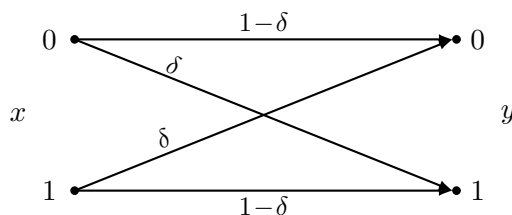


Mit Hilfe der Baumdarstellung können wir berechnen:

$$P(\text{glücklich}) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,72.$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Bei der Übertragung von gleichverteilten Bits $X \sim \mathcal{U}(\{0,1\})$ über einen Kanal werden Bits unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $\delta = 0,1$ verfälscht. Das Übergangsverhalten wird durch das folgende Diagramm illustriert:



Um ein einzelnes Bit bei der Übertragung gegen Fehler zu schützen wird das Bit n Mal unabhängig über den Kanal übertragen. Auf der Empfängerseite erfolgt eine Mehrheitsentscheidung, in der die n empfangenen Wiederholungen betrachtet werden und auf das Bit entschieden wird, das häufiger empfangen wurde. Beachten Sie, dass für eine eindeutige Mehrheitsentscheidung n ungerade sein muss.

- Bestimmen Sie für $n = 3$ die Wahrscheinlichkeit p_f dafür, dass bei der Mehrheitsentscheidung auf das falsche Bit entschieden wird. (2 Punkte)
- Es werden 10 000 Bits mit jeweils $n = 3$ Wiederholungen übertragen. Die Zufallsvariable F zählt die Anzahl an Fehlern am Empfänger **nach** der Mehrheitsentscheidung. Welcher Verteilung folgt F ? Berechnen Sie $E(F)$ und $V(F)$. (3 Punkte)

Durch ein technisches Problem in der Übertragung erhöht sich die Fehlerwahrscheinlichkeit auf $\delta = 0,45$, wodurch eine hohe Anzahl von Wiederholungen erforderlich wird.

- Bestimmen Sie die notwendige Anzahl n an Wiederholungen eines Bits, sodass die Wahrscheinlichkeit p_f für einen Fehler nach Mehrheitsentscheidung kleiner als 0,01 ist. Begründen Sie, dass Ihr Vorgehen praktisch zulässig war.

Hinweis: Verwenden Sie für große n die Näherung $n + 1 \approx n$. (6 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- Im Folgenden wird eine Zufallsvariable Z betrachtet, die einer Poissonverteilung mit Parameter λ folgt. Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion

$$\varphi_Z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jsn} P(Z = n) = e^{\lambda(e^{js} - 1)}$$

gilt. Bestimmen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktion $E(Z)$. (4 Punkte)

Lösung

- Ein Übertragungsfehler tritt genau dann auf, wenn mindestens zwei Bit bei der Übertragung verfälscht werden:

$$\begin{aligned}
 p_f &:= P(\text{mindestens zwei Bit verfälscht}) \\
 &= P(\text{drei Bit verfälscht}) + P(\text{zwei Bit verfälscht}) \\
 &= 0,1^3 + \binom{3}{2} 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,028.
 \end{aligned}$$

- b) Es handelt sich um eine Binomialverteilung mit Parameter $N = 10\,000$ und $p = 0,028$.
Damit folgt

$$E(X) = Np = 280$$

$$V(X) = Np(1-p) = 272,16$$

Bemerkung: Da eine hohe Anzahl an Übertragungen betrachtet wird, ist auch die Annahme einer Poissonverteilung korrekt. In diesem Fall folgen mit $\lambda = Np$ die Momente $E(X) = 280 = V(X)$.

- c) Die Anzahl der Übertragungsfehler ist binomialverteilt und wird im Folgenden durch die binomialverteilte Zufallsvariable S_n mit Parametern n und δ beschrieben. Da eine hohe Anzahl Wiederholungen n zu erwarten ist, wird der Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace verwendet:

$$\begin{aligned} p_f &= P\left(\frac{n+1}{2} \leq S_n\right) \\ &= P\left(\frac{n+1-2n\delta}{2\sqrt{n\delta(1-\delta)}} \leq \frac{S_n - n\delta}{\sqrt{n\delta(1-\delta)}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{n+1-2n\delta}{2\sqrt{n\delta(1-\delta)}}\right) \stackrel{!}{\leq} 0,01. \end{aligned}$$

Mit der Tabelle der Standardnormalverteilung folgt:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{n+1-2n\delta}{2\sqrt{n\delta(1-\delta)}}\right) &\geq 0,99 \\ \iff \frac{n+1-2n\delta}{2\sqrt{n\delta(1-\delta)}} &\geq 2,34 \\ \iff n+1-2n\delta &\geq 4,68\sqrt{n\delta(1-\delta)}. \end{aligned}$$

Mit der Näherung $n+1 \approx n$ aus dem Hinweis ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} n-2n\delta &\geq 4,68 \cdot \sqrt{n\delta(1-\delta)} \\ \iff n \cdot (1-2\delta) &\geq 4,68\sqrt{\delta(1-\delta)}\sqrt{n} \\ \iff \sqrt{n} &\geq \frac{4,68\sqrt{\delta(1-\delta)}}{1-2\delta} \\ \iff n &\geq 542,08 \end{aligned}$$

Damit wird ein Wiederholungscode der Länge $n = 543$ benötigt. Abschließend muss noch geprüft werden, ob die Anwendung des Grenzwertsatzes zulässig war. Da

$$n\delta(1-\delta) = 134,4 \geq 9$$

war die Verwendung praktisch zulässig.

d) Für die charakteristische Funktion folgt

$$\begin{aligned}\varphi_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{jsn} P(Z = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{jsn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{js}\lambda)^n}{n!} \\ &= \exp(-\lambda) \cdot \exp(e^{js}\lambda) \\ &= \exp(\lambda(e^{js} - 1))\end{aligned}$$

Der Erwartungswert wird mit Hilfe der ersten Ableitung

$$\varphi'_Z(s) = e^{\lambda(e^{js}-1)} \cdot \lambda j e^{js}$$

bestimmt:

$$E(Z) = \frac{\varphi'_Z(0)}{j} = \frac{\lambda j}{j} = \lambda.$$

Aufgabe 6.1 (15 Punkte)

ACHTUNG! Bearbeiten Sie **entweder** Aufgabe 6.1 **oder** Aufgabe 6.2!

An einer Supermarktkasse wird die Zeit gemessen, die zwischen dem Eintreffen aufeinanderfolgender Kundinnen und Kunden vergeht. Es wird angenommen, dass die Zeit T exponentialverteilt ist und gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_T(t|\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{1}{\tau}t\right), \quad t > 0$$

verteilt ist, wobei $\tau > 0$ die unbekannte mittlere Zeitdauer ist. Zur Analyse des Einkaufsverhaltens soll τ aus einer einfachen Stichprobe $\mathbf{T} = (T_0, \dots, T_N)$ mittels eines ML-Schätzers geschätzt werden.

- a) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion. (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Log-Likelihoodfunktion und leiten Sie daraus den ML-Schätzer $\hat{\tau}_{\text{ML}}$ her. (5 Punkte)
- c) Prüfen Sie, ob der berechnete Schätzer erwartungstreu und konsistent ist. (4 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

- d) Was sind Konfidenzintervalle und wozu werden sie verwendet? (3 Punkte)

Lösung

- a) Bestimmen der Likelihood-Funktion:

$$L_t(\tau) = \prod_{i=0}^N f_{T_i}(t_i|\tau) = \prod_{i=0}^N \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau}t_i\right)$$

- b) Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} \ell_t(\tau) &= \ln(L_t(\tau)) = \ln\left(\prod_{i=0}^N \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau}t_i\right)\right) = \sum_{i=0}^N \ln\left(\frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau}t_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^N \left(-\frac{1}{\tau}t_i - \ln(\tau)\right) = -(N+1) \cdot \ln(\tau) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^N t_i \end{aligned}$$

Für den ML-Schätzer $\hat{\tau}_{\text{ML}}$ gilt $L_t(\hat{\tau}_{\text{ML}}) = \sup_{\tau \in \mathbb{R}_{>0}} L_t(\tau)$. Durch Ableiten und null setzen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \ell(\tau) \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{\text{ML}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{N+1}{\hat{\tau}_{\text{ML}}} + \frac{1}{\hat{\tau}_{\text{ML}}^2} \sum_{i=0}^N t_i &= 0 \\ \Leftrightarrow (N+1)\hat{\tau}_{\text{ML}} - \sum_{i=0}^N t_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\tau}_{\text{ML}} &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N t_i = \bar{t}. \end{aligned}$$

Prüfen der zweiten Ableitung:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \ell(\tau) \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{\text{ML}}} = \frac{d}{d\tau} \left(-\frac{N+1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=0}^N t_i \right) \Big|_{\tau=\hat{\tau}_{\text{ML}}} = \frac{(N+1)\hat{\tau}_{\text{ML}} - 2 \sum_{i=0}^N t_i}{\hat{\tau}_{\text{ML}}^3} = -\frac{N+1}{\hat{\tau}_{\text{ML}}^2} < 0.$$

- c) Ein Schätzer heißt erwartungstreu, falls $E_\tau(T) = \tau$. Für den Erwartungswert des ML-Schätzers aus b) folgt:

$$E(\hat{\tau}_{\text{ML}}) = E\left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N T_i\right) = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N E(T_i) \stackrel{T_i \sim \text{Exp}(\tau)}{=} \frac{1}{N+1} \cdot (N+1)\tau = \tau$$

Der berechnete Schätzer ist erwartungstreu.

Der Schätzer $\hat{\tau}_{\text{ML}}$ heißt konsistent, falls $\lim_{N \rightarrow \infty} P_\tau(|\hat{\tau}_{\text{ML}} - \tau| \geq \epsilon) = 0$ für alle $\epsilon > 0$. Nachweis mittels Tschebyscheff-Ungleichung:

$$\begin{aligned} P(|\hat{\tau}_{\text{ML}} - E(X)| \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} V(\hat{\tau}_{\text{ML}}) \\ \Leftrightarrow P(|\hat{\tau}_{\text{ML}} - \tau| \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} V\left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N T_i\right) = \frac{1}{\epsilon^2(N+1)^2} V\left(\sum_{i=0}^N T_i\right) \\ &= \frac{N+1}{\epsilon^2(N+1)^2} V(T_i) = \frac{\tau^2}{\epsilon^2(N+1)}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau^2}{\epsilon^2(N+1)} = 0$ ist, ist der Schätzer konsistent.

- d) Konfidenzintervalle sind Intervalle, die einen Bereich für einen Schätzparameter $\theta \in \Theta$ angeben. Das Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ ist definiert als

$$P_\theta\left(\left\{\mathbf{x} \in \mathbf{X}^N : \theta \in C(\mathbf{x})\right\}\right) \geq 1 - \alpha,$$

wobei $1 - \alpha$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass der zu schätzende Parameter θ in dem zufälligen Intervall $C(\mathbf{x})$ enthalten ist. Mithilfe von Konfidenzintervallen kann die Unsicherheit/Erfolgswahrscheinlichkeit einer Schätzung quantifiziert werden.

Aufgabe 6.2 (15 Punkte)

ACHTUNG! Bearbeiten Sie **entweder** Aufgabe 6.1 **oder** Aufgabe 6.2!

Durch ein Schieberegister mit zwei Speicherzellen wird eine Bitfolge b_i geschoben, wobei pro Zeitschritt ein Bit in das Schieberegister geschoben wird. Die Bitfolge wird so erzeugt, dass nach einer 0 mit Wahrscheinlichkeit α eine 1 und nach einer 1 mit Wahrscheinlichkeit β eine 0 folgt.

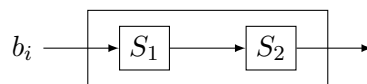


Abbildung 1: Schieberegister mit zwei Speicherzellen

Das Schieberegister kann durch eine homogene Markoffkette $X[k]$ beschrieben werden, wobei die Zustände der Markoffkette durch die Zustände des Speichers $(S_1 S_2)$ gegeben sind.

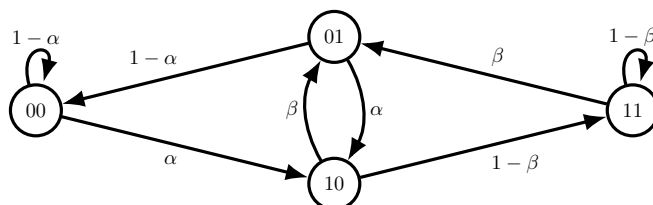
- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markoffkette. (5 Punkte)
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ besitzt $X[k]$ einen absorbierenden Zustand? Begründen Sie Ihre Wahl. (2 Punkte)

Im Folgenden gelte $\alpha = \beta = 0,5$.

- Das Schieberegister wird mit dem Zustand 00 initialisiert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prozess zum Zeitpunkt $k = 3$ im Zustand 01 ist. (4 Punkte)
- Bestimmen Sie die stationäre Verteilung. (4 Punkte)

Lösung

- Aus den möglichen Zuständen des Schieberegisters ergibt sich die Zustandsmenge der Markoffkette zu $Z \in \{00, 10, 01, 11\}$ und damit der Übergangsgraph:



Mit der Indizierung 00, 10, 01, 11 und den Übergangswahrscheinlichkeiten wird die Übergangsmatrix bestimmt zu:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00,00} & p_{00,10} & p_{00,01} & p_{00,11} \\ p_{10,00} & p_{10,10} & p_{10,01} & p_{10,11} \\ p_{01,10} & p_{01,10} & p_{01,01} & p_{01,11} \\ p_{11,00} & p_{11,10} & p_{11,01} & p_{11,11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1-\beta \\ 1-\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

- Ein Zustand $i \in Z$ heißt absorbierend, falls $p_{ii} = 1$. Für $\alpha = 0$ ist Zustand 1 = 00 absorbierend, da $p_{11} = 1$. Zusätzlich ist für $\beta = 0$ Zustand 4 = 11 absorbierend, da $p_{44} = 1$.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prozess im dritten Schritt $k = 3$ in Zustand 01 ist, kann mithilfe des Übergangsgraphen ermittelt werden. Dazu werden alle möglichen Zustandsübergänge abgelesen, die nach drei Schritten zu Zustand 01 führen.

$$\begin{aligned} P(X[3] = 01 | X[0] = 00) &= \alpha(1-\beta)\beta + (1-\alpha)\alpha\beta = \alpha\beta(2-\alpha-\beta) \\ &= 0,5 \cdot 0,5(2-0,5-0,5) = 0,25. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Mit $\mathbf{p}^\top[k] = \mathbf{p}^\top[0] \cdot \mathbf{P}^k$ und $\mathbf{p}^\top[0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ folgt für $\mathbf{p}^\top[3]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^\top[3] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 & \alpha(1-\alpha) & \alpha\beta & \alpha(1-\beta) \\ \beta(1-\alpha) & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & \alpha\beta(1-\alpha) + \alpha\beta(1-\beta) & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für Zustand 01 im dritten Schritt ist:

$$P(X[3] = 01 | X[0] = 00) = \alpha\beta(1-\alpha) + \alpha\beta(1-\beta) = \alpha\beta(2-\alpha-\beta) = 0,25.$$

- d) Für die stationäre Verteilung $\mathbf{p}$ gilt $\mathbf{p}^\top = \mathbf{p}^\top \mathbf{P}$. Zur Berechnung von $\mathbf{p}$ wird das zugehörige Eigenwertproblem $\mathbf{p}^\top \mathbf{P} = \lambda \mathbf{p}^\top$ bzw. $\mathbf{p}^\top = \lambda \mathbf{p}$ gelöst. Gesucht ist die Lösung von $(\mathbf{P}^\top - \lambda \mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{0}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^\top - \lambda \mathbf{I})\mathbf{p} &= \begin{pmatrix} 1-\alpha-\lambda & 0 & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & -\lambda & \beta \\ 0 & 1-\beta & 0 & 1-\beta-\lambda \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$ und $p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3) = \frac{1}{2}(p_1 + p_1) = p_1$. Damit ist $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = c$, wobei $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ gelten muss, da $\mathbf{p}$ eine Verteilung ist. Mit $\sum_i p_i = 4c \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow c = 1/4$ ist die gesuchte stationäre Verteilung $\mathbf{p}^\top = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r \quad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-x)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) \, dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) \, dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a} \quad \text{für } a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Trigonometrie

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{D.5})$$