

Schriftliche Prüfung zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie
14.02.2025

Musterlösung

Hinweise

Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten.

Benutzen Sie nur die zur Verfügung gestellten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an.

Verwenden Sie zur Bearbeitung einen **dokumentenechten Stift** und keine rote Farbe. Schreiben Sie leserlich und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann.

Abzugeben sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten und **nach Aufgabennummer sortierten Ausarbeitungen**. Nicht abzugeben sind die Aufgabenblätter, Ihre Formelsammlung sowie Ihr Konzeptpapier.

Zugelassene Hilfsmittel

Erlaubt sind ein beidseitig **handschriftlich** mit Bleistift, Kugelschreiber, auf Tablet o. Ä. beschriebenes und ausgedrucktes **A4-Blatt** (kein formatiertes Dokument, wie LaTeX, Word etc.) sowie ein **nicht programmierbarer** Taschenrechner.

Nach der Prüfung

Das **Ergebnis** Ihrer Prüfung erfahren Sie spätestens ab dem **14.03.2025** im Online-Notensystem. Die **Klausureinsicht** findet am **24.03.2025** statt. Weitere Informationen finden Sie auf Ilias. Die mündliche Nachprüfung findet am **02.04.2025** statt.

Geben Sie diese Aufgaben nicht mit ab, sondern behalten Sie diese als Erinnerung für oben gegebene Termine.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können alle unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- a) In einer Urne befinden sich 30 geometrische Körper, von denen $0 \leq N \leq 30$ Tetraeder (4-seitig) und $30 - N$ Würfel (6-seitig) sind, und auf deren Seiten sich die Zahlen $1, \dots, 4$ bzw. $1, \dots, 6$ befinden. Aus der Urne wird zufällig ein Körper K gezogen und anschließend mit diesem einmal gewürfelt. Das Ergebnis des Würfels wird mit der Zufallsvariable X bezeichnet.

Berechnen Sie, wie viele Tetraeder sich in der Urne befinden, wenn für das Ergebnis des Würfels $P(X = 2) = \frac{2}{9}$ gilt. (3 Punkte)

- b) Wie viele 4-stellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 1, 2, 3, 3 bilden? (4 Punkte)
- c) Ein fairer Würfel wird 7 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt in dieser Sequenz jede Zahl mindestens einmal vor? (4 Punkte)
- d) Betrachtet wird der dreifache Würfelwurf mit unterscheidbaren Würfeln. Die Zufallsvariable X beschreibt das Maximum der drei Würfe.

Beschreiben Sie das Zufallsexperiment und die Zufallsvariable X **formal** durch explizite Angabe von $\Omega = \dots$ und Angabe der Abbildung X . Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X . (4 Punkte)

Lösung

- a) Wir bezeichnen den gezogenen Körper durch die Zufallsvariable $K \in \{T, W\}$. Über den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P(X = 2) = P(X = 2|K = T) \cdot P(K = T) + P(X = 2|K = W) \cdot P(K = W)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{N}{30} + \frac{1}{6} \cdot \frac{30 - N}{30} = \frac{3N + 2(30 - N)}{360} = \frac{N + 60}{360} \stackrel{!}{=} \frac{2}{9}.$$

Damit folgt $N = 20$.

- b) Da es 5 Ziffern sind und damit eine Ziffer weggelassen wird, ergibt sich durch Betrachtung der Fälle (welche Ziffer wird weggelassen?), dass

$$2 \cdot \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!2!} = 2 \cdot 12 + 6 = 30$$

verschiedene 4-stellige Zahlen gebildet werden können.

- c) Man überlegt nacheinander:

- Damit jede Zahl vorkommt, muss jede der 6 Zahlen gezogen werden. Dafür gibt es genau eine Möglichkeit.
- Da die Reihenfolge nicht relevant ist, sind alle 6! Umordnungen dieser Zahlen ebenfalls zulässig.
- Für die siebte Zahl hat man 6 Möglichkeiten.
- Zudem gibt es 7 Positionen, um die doppelt aufgetretene Zahl zu verteilen.
- Insgesamt gibt es 6^7 Möglichkeiten.
- Zudem sind die Vertauschungen der doppelten Zahl nicht unterscheidbar, wofür es $2!$ Möglichkeiten gibt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist damit:

$$\frac{1 \cdot 6! \cdot 6 \cdot 7}{6^7 \cdot 2!} = \frac{5! \cdot 7}{6^5 \cdot 2} = \frac{35}{648}$$

- d) Wie in der Vorlesung des öfteren verwendet, wird der dreifache Würfelwurf formal beschrieben durch den Ergebnisraum

$$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, \dots, 6\}\}.$$

Das Maximum der Zahlen ist damit gegeben durch die Abbildung/Zufallsvariable

$$X : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \{1, \dots, 6\} \\ (i, j, k) & \mapsto \max\{i, j, k\}. \end{cases}$$

Für die Verteilung von X rechnet man unter Verwendung von W_1, W_2, W_3 als Ergebnis der Würfel:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P(\max\{W_1, W_2, W_3\} \leq k) \\ &= P(W_1 \leq k) \cdot P(W_2 \leq k) \cdot P(W_3 \leq k) \\ &= \frac{k^3}{216}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit folgt, da das Maximum genau dann \leq ist, wenn jede Komponente \leq ist.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Fehler haben, den Fehler A , den Fehler B oder beide gleichzeitig. Aus Erfahrung seien folgende Werte bekannt: Mit Wahrscheinlichkeit 0,05 hat ein Werkstück den Fehler A , mit Wahrscheinlichkeit 0,01 hat es beide Fehler und mit Wahrscheinlichkeit 0,03 nur den Fehler B und nicht den Fehler A .

a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: (8 Punkte)

- (i) Ein Werkstück hat den Fehler B .
- (ii) Ein Werkstück ist fehlerfrei.
- (iii) Ein Werkstück ist fehlerfrei, falls es den Fehler B nicht besitzt.
- (iv) Bei einem Werkstück wurde der Fehler A festgestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B ?

b) Sind die Ereignisse Fehler A und Fehler B unabhängig? (2 Punkte)

Bei der Qualitätskontrolle fällt Ihnen ein weiterer Fehler C auf. Der Fehler C tritt mit Wahrscheinlichkeit 0,01 auf, wenn weder Fehler A noch B eingetreten sind, oder mit Wahrscheinlichkeit 0,02, wenn sowohl Fehler A als auch B eingetreten sind. Sonst tritt Fehler C nicht ein.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Werkstück den Fehler C ? (2 Punkte)

d) Sie beobachten, dass ein Werkstück den Fehler C hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch Fehler A ? (3 Punkte)

Lösung

a) Gegeben sind $P(A) = 0,05$; $P(A \cap B) = 0,01$; $P(\bar{A} \cap B) = 0,03$

- (i) $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,04$
- (ii) Es ist mit Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,08$ fehlerhaft. Damit ist es mit Wahrscheinlichkeit $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,92$ fehlerfrei.
- (iii) $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{0,92}{0,96} \approx 0,9583$
- (iv) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$

b) $0,01 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,05 \cdot 0,04 = 0,002$. A und B sind nicht unabhängig.

c) Mit Hilfe des Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B) + P(C|\bar{A} \cap B) \cdot P(\bar{A} \cap B) \\ &\quad + P(C|A \cap \bar{B}) \cdot P(A \cap \bar{B}) + P(C|\bar{A} \cap \bar{B}) \cdot P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B) + 0 + 0 + P(C|\bar{A} \cap \bar{B}) \cdot P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &= 0,02 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,92 = 0,0094 \end{aligned}$$

d) Mit Satz von Bayes folgt für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

Wir nutzen den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, um $P(C|A)$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) + P(C|A \cap \bar{B}) \cdot P(\bar{B}|A) \\ &= P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) + 0 \cdot P(\bar{B}|A) \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{P(C|A \cap B) \cdot P(B|A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{0,02 \cdot 0,2 \cdot 0,05}{0,0094} \approx 0,0021$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Bei einem Wurfwettbewerb zeigt sich, dass die Wurfweite X in Metern durch folgende Dichte modelliert werden kann:

$$f_X(x) = \begin{cases} axe^{-x/3}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass der Parameter $a = \frac{1}{9}$ ist und dass $f_X(x)$ alle Eigenschaften einer Dichte aufweist. (3 Punkte)
- b) Berechnen Sie das erste Moment, das zweite Moment sowie die Varianz der Wurfweite X . (4 Punkte)

Um die Wurfweite zu messen, steht ein Maßband der Länge $\ell = 10$ m zur Verfügung. Die gewertete Weite w wird durch das Maßband begrenzt. Dadurch werden Würfe, die über die Länge ℓ des Maßbandes hinausgehen, mit der Länge ℓ gewertet werden, also:

$$w = \begin{cases} x, & \text{für } 0 \leq x < \ell \\ \ell, & \text{für } x \geq \ell. \end{cases}$$

- c) Geben Sie die Dichte der gewerteten Länge W an und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von W . (5 Punkte)
- d) Berechnen Sie die relative Abweichung des Erwartungswerts der gewerteten Weite $E(W)$ vom Erwartungswert der tatsächlichen Wurfweite $E(X)$. (3 Punkte)

Lösung

- a) Eigenschaften: Es ist $f_X(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $a = \frac{1}{9} \geq 0$. Weiter muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} axe^{-x/3} dx \stackrel{\text{(D.2)}}{=} a \cdot \left[9 \cdot e^{-x/3} \left(-\frac{1}{3}x - 1 \right) \right]_0^{\infty} = 9a \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{9}}$$

- b) Momente und Varianz der Wurfweite:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{9}xe^{-1/3x} dx \stackrel{\text{(D.3)}}{=} \frac{1}{9} \left[-27 \cdot e^{-x/3} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x + 2 \right) \right]_0^{\infty} = 6$$
$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{9}xe^{-1/3x} dx \stackrel{\text{(D.7)}}{=} \frac{1}{9} (3! \cdot 3^4) = 54$$
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 54 - 36 = 18$$

- c) Die Dichte von W ergibt sich aus der Dichte von X durch Clipping, also Begrenzung von $f_X(x)$ auf $0 \leq x < \ell$. Alle Werte größer ℓ werden als ℓ gewertet, sodass sich folgende Dichte für W ergibt:

$$f_W(w) = \mathbb{1}\{0 \leq w < \ell\} \cdot \frac{1}{9}we^{-w/3} + C \cdot \delta(w - \ell)$$

mit $C = \int_{\ell=10}^{\infty} \frac{1}{9}ue^{-u/3} du = 0,1546$.

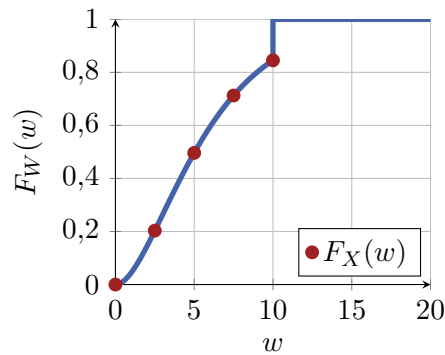
Die Verteilungsfunktion $F_W(w)$ setzt sich aus der Verteilungsfunktion von $F_X(w)$ im Bereich $0 \leq w < \ell$ und einem Sprung um C an der Stelle ℓ zusammen. Da alle weiteren Wurfweiten mit ℓ gewertet werden, wird mit dem Sprung der Wert 1 erreicht. Die Verteilungsfunktion von X für $w \geq 0$ ergibt sich zu

$$F_X(w) = \int_0^w f_X(u) du = 1 - e^{-w/3} \left(\frac{1}{3}w + 1 \right),$$

womit man folgende Punkte berechnen kann

w	0	2.5	5	7.5	10
$F_X(w)$	0	0,2032	0,4963	0,7127	0,8454

und folgende Skizze erhält



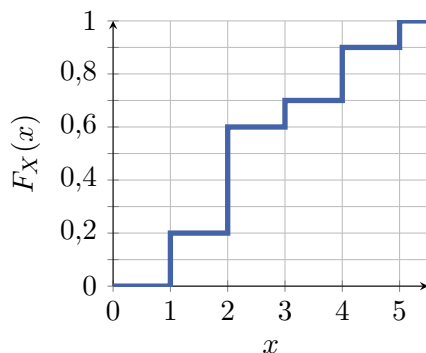
- d) Der Erwartungswert für X wurde in b) (erster Moment) berechnet als $E(X) = 6$. Der Erwartungswert von W kann über die Dichte von X berechnet werden, da $w(x)$ als Abbildung aus X entsteht.

$$\begin{aligned}
 E(W) &= E(w(X)) = \int_0^{\ell} x \cdot \frac{1}{9} x e^{-1/3x} dx + \int_{\ell}^{\infty} \ell \cdot \frac{1}{9} x e^{-1/3x} dx \\
 &\stackrel{\text{(D.3)}}{=} \frac{1}{9} \left[-27 \cdot e^{-\frac{x}{3}} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x + 2 \right) \right]_0^{\ell} + \frac{\ell}{9} \left[9 \cdot e^{-\frac{x}{3}} \left(-\frac{x}{3} - 1 \right) \right]_{\ell}^{\infty} \\
 &\stackrel{\ell=10}{=} \left(-\frac{178}{3} \cdot e^{-\frac{10}{3}} \right) - (-6) + 0 - \left(-\frac{130}{3} \cdot e^{-\frac{10}{3}} \right) = 6 - 16 \cdot e^{-\frac{10}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\Delta = \left| \frac{E(W) - E(X)}{E(X)} \right| = \frac{16 \cdot e^{-\frac{10}{3}}}{6} \approx 0,0951 \approx \underline{9,51\%}$$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Gegeben ist folgende Verteilungsfunktion $F_X(x)$:



- Stellen Sie die Verteilung $P_X(x)$ graphisch dar. (3 Punkte)
- Geben Sie die charakteristische Funktion $\varphi_X(s)$ an. Berechnen Sie mit deren Hilfe die Varianz $V(X)$. (4 Punkte)
- Vergleichen Sie den Median und den Erwartungswert von X . Sind beide Kenngrößen gleich? Begründen Sie, welche Eigenschaft dieser Verteilung ausschlaggebend ist. (3 Punkte)

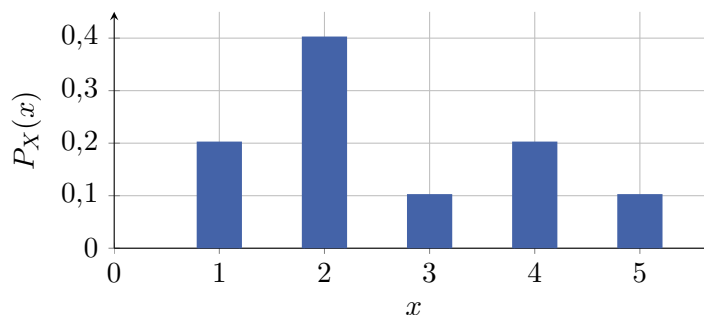
Die folgende Teilaufgabe kann unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Ein Sportverein kann pro Spiel entweder drei Punkte (Sieg), einen Punkt (Unentschieden) oder null Punkte (Niederlage) erhalten und spielt gleich viele Heim- wie Auswärtsspiele. Die Verteilung für die Anzahl der Punkte pro Heim- oder Auswärtsspiel ist unbekannt, jedoch hat die Vergangenheit gezeigt, dass der Erwartungswert für Auswärtsspiele bei $E(X_A) = 1,8$ Punkten und bei Heimspielen bei $E(X_H) = 1,9$ Punkten liegt. Außerdem ist die Standardabweichung für Auswärtsspiele $\sigma_A = 1,2$ Punkte und für Heimspiele $\sigma_H = 0,5$ Punkte. Alle Spiele können als unabhängig voneinander angenommen werden.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 100 Spielen der Gesamtpunkteschnitt (Heim- und Auswärtsspiele) bei über 2 Punkten pro Spiel liegt. Gehen Sie davon aus, dass sowohl bei Heim- als auch bei Auswärtsspielen mindestens 100 Punkte gesammelt wurden. Nutzen und benennen Sie eine geeignete Approximation. (5 Punkte)

Lösung

- Die Verteilung $P_X(x)$ ergibt sich zu:



b) Die charakteristische Funktion lautet

$$\begin{aligned}\varphi_X(s) &:= E\left(e^{jsX}\right) = \sum_{n=1}^5 e^{jsn} P(X = n) \\ &= 0,1 \cdot \left(e^{j3s} + e^{j5s}\right) + 0,2 \cdot \left(e^{js} + e^{j4s}\right) + 0,4 \cdot e^{j2s} .\end{aligned}$$

Die Momente der Verteilung ergeben sich aus der charakteristischen Funktion mit

$$E(X^k) := \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{j^k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

sodass

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{0,1}{j} \cdot (j3 + j5) + \frac{0,2}{j} \cdot (j + j4) + \frac{0,4}{j} \cdot j2 = 2,6 \\ E(X^2) &= \frac{0,1}{j^2} \cdot (j^2 9 + j^2 25) + \frac{0,2}{j^2} \cdot (j^2 + j^2 16) + \frac{0,4}{j^2} \cdot j^2 4 = 8,4\end{aligned}$$

und somit

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 8,4 - 2,6^2 = 1,64 .$$

c) Der Median ist definiert als $x_{1/2} := \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \leq x) \geq p\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$.

Somit ergibt sich ein Median $x_{1/2} = 2$.

Der Erwartungswert $E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i \cdot P(X = x_i) = 0,1 \cdot (3 + 5) + 0,2 \cdot (1 + 4) + 0,4 \cdot 2 = 2,6 \neq x_{1/2}$ (oder $E(X)$ aus b)).

Damit für diskrete Verteilungen der Median und der Erwartungswert auf den selben Punkt fallen, muss die Verteilung einerseits symmetrisch um den Erwartungswert sein und andererseits muss es eine ungerade Anzahl an möglichen Ereignissen geben. Zweiteres ist zwar erfüllt, jedoch ist die Verteilung nicht symmetrisch um $E(X)$. Alternativ kann auch gefordert werden, dass $E(X) \in \mathbb{R}$ sein muss, da dies für den Median gefordert ist. Dies ist hier auch nicht erfüllt.

d) Dafür kann der zentrale Grenzwertsatz (ZGWS) verwendet werden, wonach die Summe von N unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen durch eine Normalverteilung beschreiben werden kann, wenn N ausreichend groß ist. Wichtig zu beachten ist, dass die Heim- und Auswärtsspiele einer unterschiedlichen Verteilung folgen. Die Summe der Spiele kann aber in die Summen der Heim- und der Auswärtsspiele zerlegt werden:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = S_H + S_A = \sum_{h=1}^{N/2} X_{H,h} + \sum_{a=1}^{N/2} X_{A,a} .$$

Außerdem ist gefordert, dass $S_H \geq 100$ Punkte und $S_A \geq 100$ Punkte, wodurch auch die Forderung $S/N = (S_H + S_A)/N \geq 2$ Punkte pro Spiel bereits erfüllt ist.

Aufgrund der Unabhängigkeit von S_H und S_A gilt für die Verbundwahrscheinlichkeit $P(S_H \geq 100, S_A \geq 100) = P(S_H \geq 100) \cdot P(S_A \geq 100)$.

Um die Tabelle der Standardnormalverteilung im Anhang verwenden zu können, müssen die Zufallsvariablen noch standardisiert werden. Konkret ergibt sich

$$\begin{aligned}P(S_H \geq 100) &= 1 - P\left(\frac{S_H - \frac{N}{2} \cdot E(X_H)}{\sqrt{\frac{N}{2} \sigma_H^2}} \leq \frac{100 - \frac{N}{2} \cdot E(X_H)}{\sqrt{\frac{N}{2} \sigma_H^2}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{100 - \frac{N}{2} \cdot E(X_H)}{\sqrt{\frac{N}{2} \sigma_H^2}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{100 - \frac{100}{2} \cdot 1,9}{\sqrt{\frac{100}{2} 0,5^2}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1,4142) \approx 1 - 0,921 = 0,079\end{aligned}$$

und

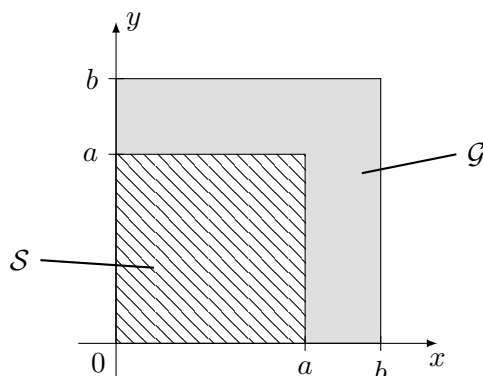
$$P(S_A \geq 100) \approx 1 - \Phi\left(\frac{100 - \frac{100}{2} \cdot 1,8}{\sqrt{\frac{100}{2} \cdot 1,2^2}}\right) \approx 1 - \Phi(1,1785) \approx 1 - 0,88 = 0,12 .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S}{N} \geq 2\right) &= P\left(\frac{S_H + S_A}{N} \geq 2\right) = P(S_H \geq 100, S_A \geq 100) \\ &= P(S_H \geq 100) \cdot P(S_A \geq 100) = 0,079 \cdot 0,12 = 0,00948 = 0,948\% . \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der zweidimensionalen Zufallsvariable $Z = (X, Y)^T$ sei über der nachfolgend dargestellten schraffierten Fläche \mathcal{S} und der grauen Fläche \mathcal{G} jeweils konstant und ansonsten null. Weiterhin gelte $P(\mathcal{G}) = 4P(\mathcal{S})$ mit den Ereignissen $G = \{Z \in \mathcal{G}\}$ und $S = \{Z \in \mathcal{S}\}$ und $0 < a < b$.



- Berechnen Sie $f_{(X,Y)}(x, y)$. Beachten Sie die Definitionsbereiche der Dichte. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. Beachten Sie ebenfalls die Definitionsbereiche der Dichten. (4 Punkte)

Im Folgenden gilt $a = 3$ und $b = 9$.

- Prüfen Sie, ob X und Y unabhängig sind. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die bedingte Dichte von X unter der Bedingung $Y = y$. (4 Punkte)

Lösung

- Aus $P(\mathcal{S}) + P(\mathcal{G}) = 5P(\mathcal{S}) \stackrel{!}{=} 1$ folgt direkt $P(\mathcal{S}) = \frac{1}{5}$ und $P(\mathcal{G}) = \frac{4}{5}$.

Da $f_{(X,Y)}(x, y)$ über den Flächen \mathcal{S} und \mathcal{G} jeweils konstant ist, gilt für $Z \in \mathcal{S}$:

$$P(\mathcal{S}) = \int_0^a \int_0^a f_{(X,Y)}(x, y) \, dx \, dy = a^2 \cdot f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{5},$$

wobei a^2 der Flächeninhalt von \mathcal{S} ist. Entsprechend gilt für $Z \in \mathcal{G}$:

$$P(\mathcal{G}) = \iint_{\mathcal{G}} f_{(X,Y)}(x, y) \, dx \, dy = (b^2 - a^2) \cdot f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{4}{5}.$$

$$\Rightarrow f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5a^2}, & 0 < x, y \leq a, \\ \frac{4}{5(b^2 - a^2)}, & 0 < x, y \leq b \text{ und } a < x + y \leq b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Die Randdichte ist $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy$:

$$0 < x \leq a: \quad f_X(x) = \int_0^a \frac{1}{5a^2} dy + \int_a^b \frac{4}{5(b^2 - a^2)} dy = \frac{1}{5a} + \frac{4(b-a)}{5(b^2 - a^2)} = \frac{5a+b}{5a(a+b)}$$

$$a < x \leq b: \quad f_X(x) = \int_0^b \frac{4}{5(b^2 - a^2)} dy = \frac{4b}{5(b^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{5a+b}{5a(a+b)}, & 0 < x \leq a, \\ \frac{4b}{5(b^2-a^2)}, & a < x \leq b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Symmetrie gilt $f_X(x) = f_Y(y)$.

c) Falls X und Y unabhängig sind, muss $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ gelten. Gegenbeispiel:

$$f_{(X,Y)}(4,4) = \frac{4}{5(9^2 - 3^2)} = \frac{1}{90} \neq f_X(4) \cdot f_Y(4) = (f_X(4))^2 = \left(\frac{4 \cdot 9}{5(9^2 - 3^2)}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

$\Rightarrow X$ und Y sind nicht unabhängig.

d) Mit $a = 3$ und $b = 9$ ergeben sich die Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & 0 < x, y \leq 3, \\ \frac{1}{90}, & 0 < x, y \leq 9 \text{ und } 3 < x+y \leq 9, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{15}, & 0 < y \leq 3, \\ \frac{1}{10}, & 3 < y \leq 9, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die bedingte Dichte berechnet sich zu Bedingte Dichte:

$$f_X(X|Y=y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{45} \cdot \frac{15}{2} = \frac{1}{6}, & 0 < x \leq 3 \text{ und } 0 < y \leq 3, \\ \frac{1}{90} \cdot \frac{10}{1} = \frac{1}{9}, & 0 < x \leq 3 \text{ und } 3 < y \leq 9, \\ \frac{1}{90} \cdot \frac{15}{2} = \frac{1}{12}, & 3 < x \leq 9 \text{ und } 0 < y \leq 3, \\ \frac{1}{90} \cdot \frac{10}{1} = \frac{1}{9}, & 3 < x \leq 9 \text{ und } 3 < y \leq 9, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen Y ,

$$f_{\vartheta}(y) = \frac{2y}{\vartheta} e^{-y^2/\vartheta}, \quad y > 0,$$

mit unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$. Von dieser Verteilung wird eine einfache Stichprobe y_1, \dots, y_N zur Schätzung des Parameters ϑ beobachtet.

- Nennen Sie die **zwei** Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit eine Stichprobe eine *einfache* Stichprobe ist. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Log-Likelihood-Funktion für das Schätzproblem. (3 Punkte)
- Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer) für ϑ durch

$$\hat{\vartheta}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 \quad (1)$$

gegeben ist. (4 Punkte)

- Prüfen Sie, ob der ML-Schätzer in Gleichung (1) erwartungstreu ist. (3 Punkte)
- Berechnen Sie die Cramér-Rao-Schranke. Nennen Sie ein Kriterium für die Varianz des ML-Schätzers, sodass er effizient ist. (3 Punkte)

Hinweis: Das zweite Moment von Y ist gegeben durch:

$$E_{\vartheta}(Y^2) = \vartheta.$$

Lösung

- Die Komponenten der Stichprobe müssen unabhängig und identisch verteilt sein.
- Für die Verbunddichte rechnet man aufgrund der Unabhängigkeit:

$$f_{\vartheta}(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^N f_{\vartheta}(y_i) = \prod_{i=1}^N \frac{2y_i}{\vartheta} e^{-y_i^2/\vartheta} = \frac{2^N \prod_{i=1}^N y_i}{\vartheta^N} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{y_i^2}{\vartheta}\right)$$

Für die Log-Likelihood-Funktion ergibt sich:

$$\ln(f_{\vartheta}(\mathbf{y})) = -N \ln\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sum_{i=1}^N \ln(y_i) - \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{\vartheta}$$

- Ableitung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln(f_{\vartheta}(\mathbf{y})) = -N \frac{2}{\vartheta} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{\vartheta^2} = -\frac{N}{\vartheta} + \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{\vartheta^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Somit folgt der Ansatz für den ML-Schätzer zu:

$$\hat{\vartheta}_{\text{ML}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 =: \bar{y}^2$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln(f_\vartheta(\mathbf{y})) &= \frac{N}{\vartheta^2} - 2 \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{\vartheta^3} = \frac{N}{\vartheta^2} - 2 \frac{N \bar{y}^2}{\vartheta^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln(f_\vartheta(\mathbf{y})) \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}_{\text{ML}}} &= \frac{N}{(\bar{y}^2)^2} - 2 \frac{N \bar{y}^2}{(\bar{y}^2)^3} = -\frac{N}{(\bar{y}^2)^2} < 0\end{aligned}$$

Da ϑ Werte im offenen Intervall $(0, \infty)$ annimmt, entfällt die Prüfung von Randpunkten. Das Extremum ist demnach ein Maximum.

d) Zum Nachweis der Erwartungstreue rechnet man:

$$E(\hat{\vartheta}_{\text{ML}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(Y_i^2) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vartheta = \vartheta$$

e) Für die Cramér-Rao-Schranke benötigt man die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln(f_\vartheta(\mathbf{y})) = \frac{N}{\vartheta^2} - 2 \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{\vartheta^3}$$

Erwartungswertbildung liefert:

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln(f_\vartheta(\mathbf{Y}))\right) = \frac{N}{\vartheta^2} - 2 \frac{\sum_{i=1}^N E(Y_i^2)}{\vartheta^3} = \frac{N}{\vartheta^2} - 2 \frac{\sum_{i=1}^N \vartheta}{\vartheta^3} = -\frac{N}{\vartheta^2}$$

Damit lautet die Cramér-Rao-Schranke:

$$V(\hat{\vartheta}_{\text{ML}}) \geq \frac{\vartheta^2}{N}$$

Wenn die Varianz des ML-Schätzers die Cramér-Rao-Schranke erreicht ist er effizient.

Formelsammlung und Tabellen/*Formulary and Tables*

A Tabelle der Standardnormalverteilung/ *Standard Normal Distribution Table*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen/*Sequences and Series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1 \quad (\text{B.2})$$

$$\sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}, \quad x \neq 1 \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \dots = (1+x)^r, \quad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots = \ln(x), \quad 0 < x \leq 2 \quad (\text{B.6})$$

$$\sum_{n=1}^k n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k \geq 1 \quad (\text{B.7})$$

C Integralrechnung/*Integrals*

$$\int \delta(x-x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{C.1})$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) \quad (\text{C.2})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{C.4})$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) \quad (\text{C.5})$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}, \quad a \neq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \quad \text{für } a > 0 \quad (\text{C.8})$$

D Trigonometrie/*Trigonometry*

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{D.1})$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad (\text{D.2})$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (\text{D.3})$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad (\text{D.4})$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (\text{D.5})$$