Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Schriftliche Prüfung im Grundlagenfach

Wahrscheinlichkeitstheorie

21.09.2015

Musterlösung

Hinweise zur Prüfung
Die Prüfungsdauer beträgt **zwei** Stunden. Es sind die nachstehend genannten **sechs** gleichgewichteten Aufgaben zu bearbeiten. Benutzen Sie nur die vorgedruckten Blätter, bearbeiten Sie die Aufgaben auf getrennten Blättern und geben Sie auf jedem Blatt die Nummer der Aufgabe sowie Ihre Matrikelnummer deutlich an. Verwenden Sie bei der Bearbeitung keine rote Farbe und vermeiden Sie, das vorgedruckte Doppelblatt zu beschriften. Beachten Sie besonders: **Aus Ihrer Ausarbeitung müssen der Lösungsweg und die gültige Lösung eindeutig erkennbar sein**, da sonst das Ergebnis nicht gewertet werden kann. Schreiben Sie leserlich.

Hilfsmittel
Erlaubt sind **ein** beidseitig von eigener Hand mit Bleistift, Kugelschreiber, Füller o. Ä. beschriebenes **A4-Blatt** (Original, keine Kopie) sowie ein **nicht-programmierbarer** Taschenrechner. **Schalten Sie alle anderen elektronischen Geräte für die Dauer der Prüfung aus**.

Abzugeben
sind Ihre in das Doppelblatt eingelegten Ausarbeitungen.

Nicht abzugeben
sind die Aufgabenblätter sowie Ihr Konzeptpapier.

Das Ergebnis
Ihrer Prüfung erfahren Sie ab dem **15.10.2015** durch Aushang im Schaukasten des Instituts (Geb. 30.34, Lichttechnisches Institut, EG).

Klausureinsicht
ist am **21.10.2015** im Seminarraum des Instituts (Geb. 05.01, Kreuzstr. 11, 3. OG). von **11:00 bis 12:00 Uhr**.

Aufgabe 1

Betrachtet wird der Ankunftsprozess $X(t)$ mit einer mittleren Rate von einem Ereignis pro zehn Sekunden. $X(t)$ folgt einer Poissonverteilung; es gilt $X(0) = 0$; t in Sekunden.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) in 30 Sekunden nicht weniger als drei Ereignisse eintreten.

b) vor jedem der ersten drei Ereignisse maximal zehn Sekunden vergehen.

c) in der ersten Minute nicht mehr als vier Ereignisse eintreten, wenn $X(30) = 3$ gilt.

d) $X(30) = 3$ gilt, wenn in der ersten Minute genau vier Ereignisse eintreten.

Lösung

a) Für $X(0) = 0$ und $t \geq 0$ gilt $P\big(X(t)=k\big) = (\lambda t)^k / k! \cdot e^{-\lambda t}$. Hier ist $\lambda = \frac{1}{10}$.

$$P\big(X(30) \geq 3\big) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\big(X(30)=k\big) = 1 - e^{-3} \sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{k!} = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) \approx \underline{0{,}5768}$$

b) Die zufällige Zeit T_k, $k \geq 1$, die zwischen dem $(k-1)$-ten und dem k-ten Ereignis vergeht, ist exponentialverteilt. Es ist $F_{T_k}(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$. Die Zufallsvariablen T_k sind unabhängig.

$$P\big(T_1 \leq 10 \wedge T_2 \leq 10 \wedge T_3 \leq 10\big) = [F_{T_k}(10)]^3 = \left(1 - e^{-1}\right)^3 \approx \underline{0{,}2526}$$

c) Wegen $P\big(X(n)=k \mid X(m)=l\big) = P\big(X(n-m) = k-l\big)$ gilt

$$P\big(X(60) \leq 4 \mid X(30)=3\big) = P\big(X(30)=0\big) + P\big(X(30)=1\big) = e^{-3}\,(1+3) \approx \underline{0{,}1991}$$

d) Allgemein gilt $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, hier:

$$P\big(X(30)=3 \mid X(60)=4\big) = \frac{P\big(X(30)=1\big)P\big(X(30)=3\big)}{P\big(X(60)=4\big)} = \frac{\frac{3^1}{1!}e^{-3} \cdot \frac{3^3}{3!}e^{-3}}{\frac{6^4}{4!}e^{-6}} = \underline{0{,}25}$$

<u>Alternativ</u> mit der Binomialverteilung:

$$P\big(X(30)=3 \mid X(60)=4\big) = \binom{4}{3}\left(\frac{30}{60}\right)^3\left(1 - \frac{30}{60}\right)^{4-3} = \underline{\frac{1}{4}}$$

Aufgabe 2

In einer Seidenspinnerei werden Rohfäden von Seidenkokons abgewickelt und zu Seidenfäden versponnen. Es wird angenommen, dass die verwertbare Fadenlänge pro Kokon durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 800\,\mathrm{m}$ und Varianz $\sigma^2 = 6400\,\mathrm{m}^2$ angemessen beschrieben werden kann. Die Fadenlängen der Kokons sind unabhängig voneinander.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons mindestens 750 m beträgt.

b) Welche verwertbare Fadenlänge eines beliebig herausgegriffenen Kokons wird mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 wenigstens erreicht?

c) Wie viele Kokons müssen abgewickelt werden, damit mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit die Gesamtlänge der verwertbaren Seidenfäden mindestens 100 km beträgt?

Lösung

a) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ die verwertbare Fadenlänge eines Kokons.

$$P\big(X \geq 750\big) = 1 - \Phi\left(\frac{750-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\,(-0{,}625) = \Phi\,(0{,}625) = \underline{0{,}7324} \quad \text{(exakt: 0,734)}$$

b) Gesucht ist die Fadenlänge x_b mit

$$P\big(X \geq x_b\big) \overset{!}{=} 0{,}8 \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{x_b-\mu}{\sigma}\right) \overset{!}{=} 0{,}2 \quad \overset{\text{Tab.}}{\Rightarrow} \frac{x_b-\mu}{\sigma} \overset{!}{\approx} -0{,}84 \quad \text{(exakt: } -0{,}8416)$$

$$\Rightarrow \underline{x_b \approx 732{,}8\,\mathrm{m}} \quad \text{(exakt: } 732{,}7\,\mathrm{m})$$

c) Bei N abgewickelten Kokons ist die Gesamtlänge $S_N \sim \mathcal{N}(N\mu; N\sigma^2)$. Weiter sei $s = 100000$.

$$P\big(S_N \geq s\big) \overset{!}{=} 0{,}98 \Rightarrow \Phi\left(\frac{s-N\mu}{\sqrt{N}\sigma}\right) \overset{!}{=} 0{,}02 \quad \overset{\text{Tab.}}{\Rightarrow} s_0 = \frac{s-N\mu}{\sqrt{N}\sigma} \overset{!}{\approx} -2{,}06 \quad \text{(exakt: } -2{,}054)$$

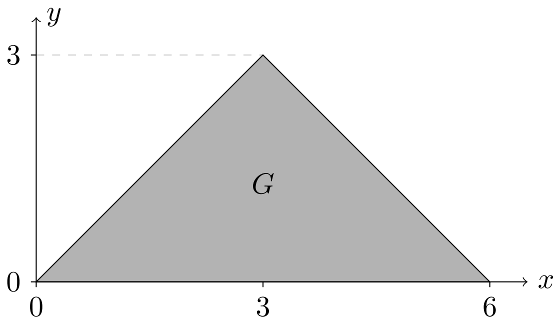
$$\Rightarrow 0 = N^{-2} + \frac{s_0\sigma}{\mu}N^{-1} - \frac{s}{\mu} \quad \Rightarrow N = \left(-\frac{s_0\sigma}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{s_0^2\sigma^2}{4\mu^2} + \frac{s}{\mu}}\right)^2 = 127{,}324 \quad \text{(exakt: 127,318)}$$

(Die zweite Lösung der a-b-c-Formel wird hier wegen $N \geq 0$, also auch $\sqrt{N} \geq 0$ verworfen)

$\Rightarrow$ Es müssen <u>mindestens 128</u> Kokons abgewickelt werden.

Aufgabe 3

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X,Y)^T$ sei über dem Gebiet G gleichverteilt.



a) Geben Sie die Dichte $f_{XY}(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y.

c) Prüfen Sie, ob X und Y stochastisch unabhängig sind.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A = \{X > 3 \wedge Y < 3\}$.

Lösung

a) Die gesuchte Dichte verschwindet außerhalb der Fläche G. Innerhalb ist die Dichte konstant und hat daher den Wert $|G|^{-1} = \left[\frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2\right]^{-1} = \frac{1}{9}$.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} |G|^{-1} & \text{, für } (x,y)^T \in G \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{, für } 0 \le y \le x \le 3 \ \vee \ 0 \le y \le 6-x \le 3 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

b) Für die gesuchte Randdichte gilt $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x$, also

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_y^{6-y} \frac{1}{9}\,\mathrm{d}x = \left[\ \frac{x}{9}\ \right]_y^{6-y} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}y & \text{, für } 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Für die Verteilungsfunktion gilt $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)\,\mathrm{d}u$, also

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{, für } y < 0 \\ \int\limits_0^y \frac{2}{3} - \frac{2}{9}u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}y - \frac{1}{9}y^2 & \text{, für } 0 \le y \le 3\ . \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

c) Bei Unabhängigkeit gilt $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Der Träger von $f_X(x)$ ist das Intervall $[0;6]$ und der des Produkts der beiden Randdichten somit das Rechteck $\{0 \le x \le 6 \wedge 0 \le y \le 3\}$; also eine echte Obermenge von G. Die Bedingung kann daher hier nicht erfüllt sein.

$\Rightarrow$ X und Y sind stochastisch abhängig.

(Natürlich kann das Produkt der Randdichten auch explizit berechnet werden.)

d) Das Ereignis A beschriebt die Wahrscheinlichkeitsmasse in der rechten Hälfte der Fläche G und hat wegen der vorliegenden Gleichverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0{,}5$.

Aufgabe 4

Betrachtet werden eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n)$ und eine Zufallsvariable Y. X_1 folgt einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ und es ist $\varphi_Y(s) = (1 - j\lambda^{-1}s)^{-n}$, $n \geq 1$.

a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\varphi_{X_1}(s)$.

b) Wie können die Momente einer Zufallsvariablen direkt aus ihrer charakteristischen Funktion berechnet werden? Beweisen Sie diesen Zusammenhang.

c) Berechnen Sie die Varianz von Y mit Hilfe ihrer charakteristischen Funktion $\varphi_Y(s)$.

d) Wie kann die Zufallsvariable Y aus $(X_1, \ldots, X_n)$ gebildet werden?

Lösung

a) Es gilt $\varphi_{X_1}(s) = E\{e^{jsX_1}\}$ und $f_{X_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x > 0$.

$$\varphi_{X_1}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jsx} f_{X_1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{jsx}\,\mathrm{d}x = \lambda \left[\frac{e^{(js-\lambda)x}}{js-\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 - j\lambda^{-1}s}$$

b) Existiert das k-te Moment, ist es durch $E\{X^k\} = j^{-k}\varphi^{(k)}(0)$ gegeben. Es gilt

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\varphi(s)\bigg|_{s=0} = E\left\{\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} e^{jsX}\right\}\bigg|_{s=0} = E\left\{j^k X^k e^{jsX}\big|_{s=0}\right\} = j^k E\{X^k\}$$

c) Mit Teilaufgabe b):

$$E\{Y\} = j^{-1}\varphi_Y^{(1)}(0) = -j \cdot \left[-n\left(1 - j\lambda^{-1}s\right)^{-n-1}\right] \cdot \left(-j\lambda^{-1}\right)\bigg|_{s=0} = n\lambda^{-1}$$

$$E\{Y^2\} = j^{-2}\varphi_Y^{(2)}(0) = -1 \cdot \left[n(n+1)\left(1 - j\lambda^{-1}s\right)^{-n-2}\right] \cdot \left(-j\lambda^{-1}\right)^2\bigg|_{s=0} = n(n+1)\lambda^{-2}$$

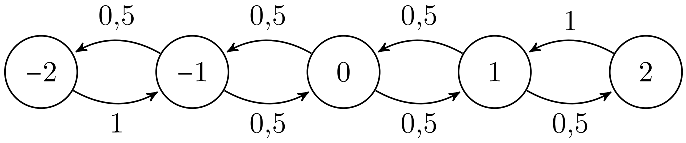
$$\mathrm{var}\{Y\} = E\{Y^2\} - E^2\{Y\} = n\lambda^{-2}$$

d) Allgemein gilt, dass die Summe unabhängiger Zufallsvariablen im Produkt ihrer charakteristischen Funktionen resultiert und die charakteristische Funktion die Verteilung eindeutig charakterisiert.

$\Rightarrow$ Es gilt $\varphi_Y(s) = [\varphi_X(s)]^n$ und daher $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Aufgabe 5

Die Markoffkette $X(n)$ wird durch den Übergangsgraphen



beschrieben.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

b) Berechnen Sie die mittlere Dauer einer Irrfahrt vom Zustand −2 über 2 zurück zu −2.

c) Für $X(n)$ existiert eine Zustandverteilung $\vec{p}(0) = \vec{p}$, die über die Zeit konstant bleibt. Finden Sie eine Beschreibung als Eigenwertproblem und bestimmen sie $\vec{p}$.

Lösung

a) Mit den Zuständen von links nach rechts angeordnet, ergibt sich

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wie aus dem Übergangsgraphen ersichtlich, entspricht die gesuchte Irrfahrtsdauer k dem Doppelten derer von Zustand -2 aus mit Zustand 2 als Rand:

$$\begin{aligned}
m_2 &= 0 \\
m_1 &= 1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_0 && \Rightarrow \quad m_1 = 1 + \frac{1}{2}m_0 \\
m_0 &= 1 + \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_{-1} && \Rightarrow \quad m_0 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}m_0 + \frac{1}{2}m_{-1} && \Rightarrow \quad m_0 = 2 + \frac{2}{3}m_{-1} \\
m_{-1} &= 1 + \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{2}m_{-2} && \Rightarrow \quad m_{-1} = 2 + \frac{1}{3}m_{-1} + \frac{1}{2}m_{-2} && \Rightarrow \quad m_{-1} = 3 + \frac{3}{4}m_{-2} \\
m_{-2} &= 1 + m_{-1} && \Rightarrow \quad m_{-2} = 4 + \frac{3}{4}m_{-2} && \Rightarrow \quad m_{-2} = 16 && \Rightarrow \underline{k = 32}
\end{aligned}$$

c) Für $\vec{p}$ soll gelten $\vec{p}^T\overline{P} = \lambda\vec{p}^T$, d.h. der stochastische Vektor $\vec{p} = (p_{-2},\ p_{-1},\ p_{-0},\ p_1,\ p_2)^T$ soll (Links-)Eigenvektor von $\overline{P}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ sein. Weiter gilt $p_{-2} + p_{-1} + p_{-0} + p_1 + p_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
p_{-2} &= \frac{1}{2}p_{-1} && \Rightarrow \quad p_{-2} = \frac{1}{2}p_0 \\
p_{-1} &= p_{-2} + \frac{1}{2}p_0 && \Rightarrow \quad p_{-1} = p_0 \\
p_0 &= \frac{1}{2}p_{-1} + \frac{1}{2}p_1 && \Rightarrow \quad p_0 = p_1 \\
p_1 &= \frac{1}{2}p_0 + p_2 && \Rightarrow \quad p_2 = \frac{1}{2}p_0 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_1 && \Rightarrow \quad \frac{1}{2}p_0 + p_0 + p_0 + p_0 + \frac{1}{2}p_0 = 4p_0 \overset{!}{=} 1
\end{aligned}$$

Damit ist $p_0 = \frac{1}{4}$ und die gesuchte Zustandsverteilung $\underline{\vec{p} = \left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\right)^T}$.

Aufgabe 6

Ein Skatspiel besteht aus vier Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz) zu jeweils acht Karten (7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass). Beim zufälligen Austeilen erhält jeder der drei Spieler zehn Karten; zwei Karten werden in den Skat gelegt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable Z = {„Anzahl Karten der Farbe Pik im Skat“}.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der Spieler genau zwei Buben erhält.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält einer der Spieler den Kreuz- und den Herzbuben?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält jeder Spieler genau ein Ass?

Lösung

a) Die Zufallsvariable Z folgt einer Hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern $N = 32$, $K = 2$ und $n = 8$. Für $k \in \{0,1,2\}$ gilt $P(Z = k) = \binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k} \cdot \binom{N}{K}^{-1}$ und damit:

$$\begin{aligned}
P(Z = 0) &= \frac{24}{32} \cdot \frac{23}{31} = 0{,}5565 \\
P(Z = 1) &= \frac{8}{32} \cdot \frac{24}{31} \cdot 2 = 0{,}3871 \\
P(Z = 2) &= \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = 0{,}0565 \qquad = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1)
\end{aligned}$$

b) Auch hier liegt eine Hypergeometrische Verteilung vor: Es ist $N = 32$, $K = 10$, $n = 4$ und $k = 2$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu

$$p_b = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} \approx \underline{0{,}2891}.$$

c) Hier sind nur zwei der vier Buben „günstig“, d.h. $n = 2$:

$$p_c = \frac{\binom{2}{2}\binom{30}{8}}{\binom{32}{10}} = \frac{10}{32} \cdot \frac{9}{31} \approx \underline{0{,}0907}.$$

d) Die Anzahl an günstigen Positionen für die Asse sind je zehn pro Spieler und zwei im Skat. Auch ist es egal, wer welches Ass erhält (4!). Die 28 übrigen Karten können beliebig angeordnet werden (28!):

$$p_d = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4! \cdot 28!}{32!} \approx \underline{5{,}56\%}.$$

<u>Alternativ</u> kann auch mit bedingten Wahrscheinlichkeiten gerechnet werden: Sei S_i das Ereignis „Spieler i erhält genau ein Ass“. Der Skat sei S_4.

$$\begin{aligned}
p_d &= P(S_1)P(S_2|S_1)P(S_3|S_2S_1)\underbrace{P(S_4|S_3S_2S_1)}_{=1} \\
&= \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{19}{9}}{\binom{22}{10}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{10}{9}}{\binom{12}{10}} \approx \underline{5{,}56\%}.
\end{aligned}$$

Formelsammlung und Tabellen

A Tabelle der Standardnormalverteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500000	0,80	0,788145	1,60	0,945201	2,40	0,991802	3,20	0,999313
0,02	0,507978	0,82	0,793892	1,62	0,947384	2,42	0,992240	3,22	0,999359
0,04	0,515953	0,84	0,799546	1,64	0,949497	2,44	0,992656	3,24	0,999402
0,06	0,523922	0,86	0,805105	1,66	0,951543	2,46	0,993053	3,26	0,999443
0,08	0,531881	0,88	0,810570	1,68	0,953521	2,48	0,993431	3,28	0,999481
0,10	0,539828	0,90	0,815940	1,70	0,955435	2,50	0,993790	3,30	0,999517
0,12	0,547758	0,92	0,821214	1,72	0,957284	2,52	0,994132	3,32	0,999550
0,14	0,555670	0,94	0,826391	1,74	0,959070	2,54	0,994457	3,34	0,999581
0,16	0,563559	0,96	0,831472	1,76	0,960796	2,56	0,994766	3,36	0,999610
0,18	0,571424	0,98	0,836457	1,78	0,962462	2,58	0,995060	3,38	0,999638
0,20	0,579260	1,00	0,841345	1,80	0,964070	2,60	0,995339	3,40	0,999663
0,22	0,587064	1,02	0,846136	1,82	0,965621	2,62	0,995604	3,42	0,999687
0,24	0,594835	1,04	0,850830	1,84	0,967116	2,64	0,995855	3,44	0,999709
0,26	0,602568	1,06	0,855428	1,86	0,968557	2,66	0,996093	3,46	0,999730
0,28	0,610261	1,08	0,859929	1,88	0,969946	2,68	0,996319	3,48	0,999749
0,30	0,617911	1,10	0,864334	1,90	0,971283	2,70	0,996533	3,50	0,999767
0,32	0,625516	1,12	0,868643	1,92	0,972571	2,72	0,996736	3,52	0,999784
0,34	0,633072	1,14	0,872857	1,94	0,973810	2,74	0,996928	3,54	0,999800
0,36	0,640576	1,16	0,876976	1,96	0,975002	2,76	0,997110	3,56	0,999815
0,38	0,648027	1,18	0,881000	1,98	0,976148	2,78	0,997282	3,58	0,999828
0,40	0,655422	1,20	0,884930	2,00	0,977250	2,80	0,997445	3,60	0,999841
0,42	0,662757	1,22	0,888768	2,02	0,978308	2,82	0,997599	3,62	0,999853
0,44	0,670031	1,24	0,892512	2,04	0,979325	2,84	0,997744	3,64	0,999864
0,46	0,677242	1,26	0,896165	2,06	0,980301	2,86	0,997882	3,66	0,999874
0,48	0,684386	1,28	0,899727	2,08	0,981237	2,88	0,998012	3,68	0,999883
0,50	0,691463	1,30	0,903200	2,10	0,982136	2,90	0,998134	3,70	0,999892
0,52	0,698468	1,32	0,906582	2,12	0,982997	2,92	0,998250	3,72	0,999900
0,54	0,705401	1,34	0,909877	2,14	0,983823	2,94	0,998359	3,74	0,999908
0,56	0,712260	1,36	0,913085	2,16	0,984614	2,96	0,998462	3,76	0,999915
0,58	0,719043	1,38	0,916207	2,18	0,985371	2,98	0,998559	3,78	0,999922
0,60	0,725747	1,40	0,919243	2,20	0,986097	3,00	0,998650	3,80	0,999928
0,62	0,732371	1,42	0,922196	2,22	0,986791	3,02	0,998736	3,82	0,999933
0,64	0,738914	1,44	0,925066	2,24	0,987455	3,04	0,998817	3,84	0,999938
0,66	0,745373	1,46	0,927855	2,26	0,988089	3,06	0,998893	3,86	0,999943
0,68	0,751748	1,48	0,930563	2,28	0,988696	3,08	0,998965	3,88	0,999948
0,70	0,758036	1,50	0,933193	2,30	0,989276	3,10	0,999032	3,90	0,999952
0,72	0,764238	1,52	0,935745	2,32	0,989830	3,12	0,999096	3,92	0,999956
0,74	0,770350	1,54	0,938220	2,34	0,990358	3,14	0,999155	3,94	0,999959
0,76	0,776373	1,56	0,940620	2,36	0,990862	3,16	0,999211	3,96	0,999963
0,78	0,782305	1,58	0,942947	2,38	0,991344	3,18	0,999264	3,98	0,999966

B Folgen und Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1 \tag{B.1}$$

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1 \tag{B.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = (1+x)^r \qquad \text{für } \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots = e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{B.4}$$

C Integralrechnung

$$\int \delta(x - x_0)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{C.1}$$

$$\int x\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2} (ax - 1) \tag{C.2}$$

$$\int x^2\, \mathrm{e}^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2) \tag{C.3}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax} \sin(bx)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2} \Big(a \sin(bx) - b \cos(bx) \Big) \tag{C.4}$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{für } a > 0, n \in \mathbb{N} \tag{C.5}$$

$$\int_0^{\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \qquad \text{für } a > 0 \tag{C.6}$$