

Ergebnisraum $\Omega = \{\xi_1, \dots, \xi_n, \dots, \xi_N\}$ $|P(\Omega)| = 2^n$
Menge aller Ergebnisse ξ_n

Laplace'sches Zufallsexperiment: alle Elementarereignisse $\xi \in \Omega$ eines endl. Ergebnisraums Ω treten gleich häufig auf
 $P(A) = \frac{\text{Anzahl Elementarereignisse}}{\text{Gesamtzahl Elementarereignisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Kombinatorik

Auswahl von k aus N Elementen	Permutationen	Kombinationen	Variationen
ohne Wiederholung	$N!$	$\binom{N}{k}$	$k! \binom{N}{k}$
mit Wiederholung	$\frac{N!}{k!}$	$\binom{N+k-1}{k}$	N^k

Wahrscheinlichkeiten und Mengenoperationen

↳ Negation $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

↳ Vereinigung $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

↳ Durchschnitt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ falls A und B unabhängig

de Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Distributivgesetze $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Hypergeom. Verteilung: $P_h = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ von n aus N ausgewählt sind k aus M günstig

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit
 $P(B) = \sum_{n=1}^N P(B|A_n) \cdot P(A_n)$

Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

Zufallsvariable X: Eine Funktion $Y = X(\xi) : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis aus Ω eine reelle Zahl zuordnet, so dass $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt

Verteilungsfunktion einer ZV X:
 $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} F = 1$ monoton nichtfallend

Eigenschaften einer Dichte

$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Erwartungswert (Mittelwert) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ diskret $\Rightarrow E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot P_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ diskrete Dichte

Varianz: $\text{var}(X) = D^2(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ $D(X) \rightarrow$ Standardabweichung

Funktionen von ZV $Y = g(X)$
 $f_Y(y) = \sum_{n=1}^N \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$ mit $x_1, \dots, x_n$ reelle Wurzeln von $y = g(x)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx = E(g(X))$$

Charakt. Funktion

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) \quad \text{diskret} \Rightarrow \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{itx_n} P_n$$

$$E(X^h) = \frac{\varphi^{(h)}(0)}{i^h}, \quad h=1,2,\dots$$

Spez. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zweipunktverteilung: ZV X kann genau zwei Werte x_1 und x_2 ($x_2 < x_1$) mit $P(A) = P(X=x_1) = p$, $P(\bar{A}) = P(X=x_2) = 1-p$
 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_2 \\ 1-p & \text{für } x_2 \leq x < x_1 \\ 1 & \text{für } x \geq x_1 \end{cases}$ $E(X) = x_1 p + x_2 (1-p)$
 $D^2(X) = (x_1 - x_2)^2 p (1-p)$
 $\varphi(t) = e^{itx_2} + p(e^{itx_1} - e^{itx_2})$

Binomialverteilung: es werden N unabh. identische Versuche mit jeweils zwei Ausgängen (A, $\bar{A}$) durchgeführt mit $p(A) = p$ ($P(\bar{A}) = 1-p$)
 $P(X_N = h) = \binom{N}{h} p^h \cdot (1-p)^{N-h}$ $E(X_N) = N \cdot p$
 $D^2(X_N) = N p (1-p)$
 $\varphi(t) = [1 + p(e^{it} - 1)]^N$

Polynomialverteilung: N Wiederholungen, Ergebnis: eines der paarweise einander ausschließenden Ereignisse A_j ($j=1, \dots, r+1$) mit der Wahrscheinlichkeit $P_j = P(A_j)$, wobei $\sum_{j=1}^{r+1} P_j = 1$ gilt eintreten
 $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{r+1} = k_{r+1}) = \frac{N!}{k_1! \dots k_r! (N-k)!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r} \cdot q^{N-k}$ wobei $k = k_1 + \dots + k_r$, $q = 1 - p_1 - \dots - p_r$

Poissonverteilung: Annäherung Binomialverteilung für große N
ZV, nimmt die Werte $h = 0, 1, \dots$ mit Wahrscheinlichkeit
 $P(X=h) = \frac{z^h}{h!} e^{-z}$, $z = N \cdot p$

Hypergeom. Verteilung: In einer Urne liegen N schwarze und N-M weiße Kugeln. Der Urne werden zufällig n Kugeln entnommen, X beschreibt Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln
 $P(X=h) = \frac{\binom{M}{h} \binom{N-M}{n-h}}{\binom{N}{n}}$
 $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$ $D^2(X) = n \cdot \frac{M(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
 $P = \frac{M}{N}$, festes n $\Rightarrow$ für große N ($\frac{n}{N} < 0,05$) näherungsweise Übergang zu Binomialverteilung

Gleichverteilung

ZV X mit der Dichte $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$ $E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$, $E(X^2) = \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3}$
 $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
 $\varphi(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{is(b-a)}$

Exponentialverteilung

ZV X mit der Dichte $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$ $\lambda > 0$
 $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
 $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

Normalverteilung

ZV X mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $\sigma > 0$
 $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$ $E(X) = \mu$ $D^2(X) = \sigma^2$
 $\varphi(t) = e^{it\mu} \exp\left(-\frac{(\sigma t)^2}{2}\right)$
 $\Phi(x) \rightarrow N(0,1)$ -Verteilung $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow$ Transformation
 $P(Z \leq z) = \Phi(z)$, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Weibullverteilung

$\beta, \alpha > 0$
 $f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)$, $x \geq 0$
 $F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)$, $x \geq 0$

Gammafunktion: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$, $x > 0$

$E(X) = \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$
 $D^2(X) = \Gamma^2\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$
 $\beta=1 \Rightarrow$ Exponentialverteilung mit $\lambda = \frac{1}{\alpha}$
 $\beta=2 \Rightarrow$ Rayleighverteilung mit $\sigma^2 = 2\alpha^2$

Mehrdimensionale ZV

• $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u,v) du dv$

• Dichte: $f(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x)$, $f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$

• sind beide Komponenten diskret verteilt: $f_{XY}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1=x_{1n}, X_2=x_{2k}) \delta(x_1-x_{1n}, x_2-x_{2k})$

• Randdichte $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dy$

• Bedingte Dichte: $f_X(x|Y=y_1) = \frac{f_{XY}(x,y_1)}{f_Y(y_1)}$, $f_Y(y_1) > 0$

Zweidimensionale Normalverteilung

• Dichte: $f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$

gem. Dichte unabh. Variablen

$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

• Erwartungswerte: $E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$

Korrelationskoeffizient & Kovarianz

$\text{cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$ $f_{XY} = f(x,y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{D(X) \cdot D(Y)}$

Unkorreliert $\Rightarrow f_{XY} = 0 \Leftrightarrow$ unabhängig

Spezialfall: Normalverteilung $f_{XY} = 0 \Rightarrow$ unabhängig

Flut zweidimensionaler ZV

① $U_1 = g_1(X,Y)$ $U_2 = g_2(X,Y)$ ② $X = h_1(u_1, u_2)$ $Y = h_2(u_1, u_2)$

$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix} \Rightarrow$ ③ $\int_{u_1, u_2} f_{XY}(h_1, h_2) \cdot |J|$

Tschebyscheffsche Ungleichung

$P(|X-c| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E\{|X-c|^2\}$ $\text{dann gilt } \forall \epsilon > 0$

Zentraler Grenzwertsatz

X_n sei Folge unabhängiger, ident. vert. ZV mit $E(X_n) = \mu < \infty$, $D^2(X_n) = \sigma^2 < \infty$, dann gilt mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$

Satz von Moivre - Laplace

S_n sei binomialverteilte ZV mit N und p , dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{S_n - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$

$(N < \infty) \Rightarrow D^2(S_n) \geq 9$

Chintschinsches Gesetz der gr. Zahlen

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right\} = 1$

komplexwertige ZV

$Z = X + jY$, $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$D^2(Z) = D^2(X) + D^2(Y)$ $\Leftrightarrow$ komplex konjugiert

$\text{cov}(Z_1, Z_2) = [\text{cov}(Z_1, Z_2)]^*$

Stoch. Prozesse

Realisierung: Zeitfunktion $X(t, \omega)$

• AUI: $P_{XX}(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X(t_2))$

• strenge Stationarität $E(X(t)) = \text{const.}$, $P_{XX}(t_1, t_2) = P_{XX}(\tau)$
 $= P_{XX}(t+t, \tau)$

• Kreuzkorrelation (gem. Stationarität) $P_{XY}(t_1, t_2) = P_{XY}(\tau) = P_{YX}(-\tau)$

• Autokorrelation $C_{XX}(t_1, t_2) = P_{XX}(t_1, t_2) - \mu(t_1) \mu(t_2)$

für stationäre Prozesse: $C_{XX}(t_1, t_2) = P_{XX}(\tau) - \mu^2 = P_{XX}(\tau)$

• stoch. Unabhängigkeit: $f_{XY}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = f_X(\dots) \cdot f_Y(\dots)$

↳ Unkorreliertheit $\forall t_1, t_2$ $P_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)) \cdot E(Y(t_2))$

• Leistungsdichtespektrum (stat. Prozess)
 $D_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

• mittlere Leistung $P_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{XX}(f) df = P_X$

zeitdiskrete Zufallsprozesse

• Autokorrelationsfolge $P_{XX}(n, h) = E\{X(n) \cdot X(h)\}$

• für stationäre Prozesse: $P_{XX}(n, h) = P_{XX}(h-n)$

• mittlere Leistung $P_{XX}(0) = E\{X^2(n)\}$

• Leistungsdichtespektrum $D_{XX}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{XX}(m) e^{-j2\pi f m}$

Poissonprozess

$X(t), t \geq 0$
 $P\{X(t_1) = n | X(t_2) = m\} = P\{X(t_1 - t_2) = n-m\} = \frac{(t)^k}{k!} e^{-t}$

Zwischenankunftzeiten: $T \sim \text{Exp}(\lambda) \Leftrightarrow$ Zeitdifferenzen

homogene Markoffkette

$\bar{P}^T T(t+h) = \bar{P}^T T(t) \cdot \bar{P}^h$

mittlere Dauer einer Irrfahrt bis zur Absorption im Rand $w_P = 0$
 $w_i = 1 + \sum_{k=1}^N p_{ik} w_k$

Zyklischstationärer Prozess

• Erwartungswert und AUI $P_{XX}(t, \tau)$ periodisch mit der selben Periode T . Mittlere AUI $\bar{P}_{XX}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P_{XX}(t+t, \tau) dt$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$

Fouriertransformation

$1 \leftrightarrow \delta(f)$

$\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \delta(f+f_0) + \frac{1}{2} \delta(f-f_0)$

$\sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2} \delta(f+f_0) - \frac{j}{2} \delta(f-f_0)$

$e^{-at}, t > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f}$

$e^{-a|t|}, a > 0 \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$