**Ergebnisraum** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots, \omega_N\}$ (Menge aller Ereignisse $\omega_n$) | **Ereignis** $A \subset \Omega$ → sicheres Ereignis: $\Omega$ → unmögliches Ereignis: $\emptyset$ → Elementarereignis $A = \{\omega_n\} \subset \Omega$

**Laplaces Zufallsexpriment** alle Ereignisse gleichwahrscheinlich $P(\omega_i) = 1/|\Omega|$ oder $P(A) = |A|/|\Omega|$ | **Kombinatorik** Auswahl von K aus N Elementen

**Permutation** ($K=N$) → ohne Zurücklegen ① alle N unterscheidbar: $|\Pi_N| = N!$ ② $L_1, L_2, \dots, L_n \le N$ der Elemente sind gleich $|\Pi_N^{(L_1, L_2, \dots, L_n)}| = N!/(L_1! \cdot L_2! \cdots L_n!)$

| N unterscheidbar | Mit Zurücklegen | Ohne Zurücklegen |
|---|---|---|
| Mit Reihenfolge | $\lvert\tilde{V}_N^{(K)}\rvert = N^K$ | $\lvert V_N^{(K)}\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$ |
| Ohne Reihenfolge | $\lvert\tilde{C}_N^{(K)}\rvert = \binom{N+K-1}{K}$ | $\lvert C_N^{(K)}\rvert = \binom{N}{K}$ |

**absolute Häufigkeit** $h_N(A)$ gibt an wie viele Elemente mit dem gleichen interessierenden Merkmal gezählt wurden. **relative Häufigkeit** $H_N(A) = h_N(A)/N$ | **Bedingte WS** → WS für A, wenn B bereits eingetroffen $P(A|B) = P(A\cap B)/P(B)$ | N unabhängige, identische Versuche mit mehr als 2 möglichen Ergebnissen

**Satz der totalen WS** $P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n) \cdot P(A_n)$ | **Satz von Bayes** $P(A|B) = P(B/A) \cdot P(A) / P(B)$

**Hypergeometrische Verteilung** von n aus N ausgewählten sind K aus M günstig $P_K = \frac{\binom{M}{K}\binom{N-M}{n-K}}{\binom{N}{n}}$ *

**Binomialverteilung** N unabhängige, identische Versuche mit 2 möglichen Ergebnissen $P(x_n = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, $E(x_n) = N \cdot p$, $D^2(x_n) = N \cdot p(1-p)$

**Polynomialverteilung** $N = k_1 + k_2 + \dots + k_{r+1}$ $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{r+1} = k_{r+1}) = \frac{N!}{k_1! k_2! \cdots k_{r+1}!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_{r+1}^{k_{r+1}}$

**Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ | $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$, $E(x) = \mu$ & $D^2(x) = \sigma^2$

**Poisson-Verteilung** gute Approximation der Binomialverteilung, wenn N groß und p klein. $p(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit: $\lambda = N \cdot p$ | $E(x) = \lambda$, $D^2(x) = \lambda$

**Exponentialverteilung** zum Ermitteln der Zeitspanne $\tau$ $P(X \le \tau) = F(\tau) = 1 - e^{-\lambda \cdot \tau}$ | $E(\tau) = \frac{1}{\lambda}$, $D^2(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$

**Gleichverteilung** $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ | $E(X) = (a+b)/2$; $D^2(X) = (b-a)^2/12$

$F(x) = \Phi(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \sim \mathcal{N}(0,1)$ | **Zufallsvariable X** Eine Funktion $X = X(\omega): \omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis aus $\Omega$ eine reelle Zahl zuordnet, sodass $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}$, $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt.

**Unabhängigkeit von Ereignissen** $P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(A) \cdot P(B)$ | **Eigenschaften Dichte** (i) $f_X(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (iii) $dF_X(x)/dx = f_X(x)$

**Eigenschaften Verteilungsfunktion** ① $F: \mathbb{R} \to [0,1]$; ② $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ | **Verteilungsfunktion** | **Dichte diskrete ZV** $\sum_{n=1}^{\infty} P(X = x_n)\,\delta(x - x_n)$

③ monoton nichtfallend: $x_1 \le x_2$: $F(x_1) \le F(x_2)$; ④ rechtsseitig stetig: $F(x+0) = \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$ | **Kontinuierlich** $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$

**Verteilungsfunktion diskret** $F_n(t) = P(X(t) \ge n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X(t) = k) \Leftrightarrow F_n(X(t)) = P(X(t) \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(X(t) = k)$ | $P(X > x) = \int_{x}^{\infty} f_X(u)\,du$

**Erwartungswert** $E(X)$ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$ → diskret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n$ | **Varianz** $D^2(x)$ $D^2(x) = var(x) = E([X - E(x)]^2) = E(x^2) - E^2(x)$ | **K-tes Moment** NV $E((X - E(x))^K)$

↳ $E(aX+b) = a\,E(x) + b$, $D^2(aX+b) = a^2 D^2(x)$ | **Standartisierte ZV** $E(X) = 0$, $D^2(X) = 1$ | **charakteristische Funktion ZV** $\varphi_X(s) = E(e^{jsX})$ ① Kontinuierlich ② Diskret $\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{js \cdot x_n} \cdot p_n$

für 2 ZV: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ * | **Randdichte** $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ | **2D-Verteilungsfunktion** $F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,dv\,du$ | **Allgemeines k-tes Moment** $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx$

$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\,cov(X,Y)$

**Gemeinsame Dichte unabhängiger ZV** $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ | **Bedingte Dichte** $f_X(x|Y=y_1) = f_{XY}(x, y_1)/f_Y(y_1)$ | ① $g(x)$ eindeutig & umkehrbar

**Funktionen von ZV** • gegeben: Verteilung/Dichte von X • gesucht: Verteilung/Dichte von $Y = g(X) \Leftrightarrow F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = \dots = P(X \le \cdot)$

② $g(x)$ nicht eindeutig & nicht umkehrbar: vorgehen wie bei ①. → Beispiel $Y = X^2 = g(x) \to F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(x) \le y) = P(X^2 \le y)$ ↳ nun $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

③ Jacobi-Determinante / Funktionen mehrdimensionaler ZV → Allgemein: $f_Y(y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$ = $P(|X| \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \to f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

Bsp: 2D: ① gegeben: (a) Zufallsvariable $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ (b) gemeinsame Dichte von $\vec{X}$ (z.B. $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = x_1 + x_2$) (c) Gültigkeitsbereich der gemeinsamen Dichte (z.B. $x \in (0,1]; y \in (0,1]$) ② gesucht: Dichte einer neuen Funktion Z, bestehend aus $X_1, X_2$ (z.B. $Z = Z(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$)

es folgt: $f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$ → hier im Beispiel wäre: $x_1 = \sqrt{y}$ & $x_2 = -\sqrt{y}$

③ Vorgehen: $X_1, X_2 \xrightarrow{\text{Variablentransformation}} X_1, Z \xrightarrow{\text{Randdichte}} Z$

① $u_1 = x_1$ (beliebig); $u_2 = x_1 x_2 = z$

↳ $x_1 = u_1$ & $x_2 = u_2/x_1 = u_2/u_1 = z/x_1$

$|J| = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial u_1 & \partial x_1/\partial u_2 \\ \partial x_2/\partial u_1 & \partial x_2/\partial u_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Bsp}} |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u_2}{u_1^2} & \frac{1}{u_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{|u_1|}$

→ Gültigkeitsbereich anpassen:

$x_1 \in (0,1] \to 0 < u_1 \le 1$ & $x_2 \in (0,1] \to 0 < u_2 \le u_1 \le 1$

→ Einsetzen in $f_{u_1,u_2}(u_1,u_2) = f_{X_1X_2}(x_1,x_2) \cdot |J|$

$\xrightarrow{\text{Bsp}} f_{X_1X_2}(u_1, \frac{u_2}{u_1}) \cdot \frac{1}{u_1}$ (nun ersetze $u_1, u_2$ mit $x_1, z$)

↳ $f_{X_1,Z}(x_1,z) = \frac{1}{x_1} f_{X_1X_2}(x_1, \frac{z}{x_1})$

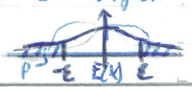
$= \begin{cases} \frac{1}{x_1}(x_1 + \frac{z}{x_1}) = 1 + z/x_1^2, & 0 < z \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

② $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,Z}(x_1,z)\,dx_1$ mit $x_1 \in [z,1]$

↳ $\int_z^1 1 + z/x_1^2\,dx_1 = 2(1-z)$; $0 < z \le 1$

**Tschebyscheffsche Ungleichung** Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$: $P(|X - c| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} E(X - c^2)$ → Sonderfall $c = E(X)$

↳ $P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} D^2(X)$




**Zentraler Grenzwertsatz** Sind $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit identischer Verteilung und $m = E(X_n) < \infty$, sowie $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n = X_1 + X_2 + \dots$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{S_N - N \cdot m}{\sqrt{N d^2}} \le x\right) = \Phi(x)$

**Satz von de Moivre-Laplace** • Falls $Np(1-p) = D^2(S_N) \ge 9$ erlaubt

es gilt: $P_a = P(a \le S_N \le b) = P(S_N \le b) - P(S_N \le a)$

$S_N \le b \Leftrightarrow \frac{S_N - N \cdot p}{\sqrt{Np(1-p)}} \le \frac{b - N \cdot p}{\sqrt{Np(1-p)}} = \Phi\left(\frac{b - N \cdot p}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$

$S_N \le a \Leftrightarrow \frac{S_N - N \cdot p}{\sqrt{Np(1-p)}} \le \frac{a - N \cdot p}{\sqrt{Np(1-p)}} = \Phi\left(\frac{a - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$

nun $P_a = \Phi\left(\frac{b - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$

**Autokorrelationsfunktion** $\varphi_{XX}(t_1,t_2) = E(X(t_1) X^*(t_2))$

**Leistungsdichtespektrum** $\Phi_{XX}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{XX}(\tau)\}$

→ $\Phi_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau)\,d\tau$

**mittlere Leistung** $\bar{P}_X = \varphi_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f)\,df$

**weißes Rauschen / Gauss Rauschen** $\Phi_{XX}(f) = const \leftrightarrow \varphi_{XX}(\tau) = const\ \delta(\tau)$ ↳ existiert nicht, da Leistung und Bandbreite nicht endlich sind und Komplexwertige Signale nicht existieren.

$E(X(t)) = const(t) \Leftrightarrow \varphi_{XX}(t_1,t_2) = \varphi_{XX}(t, t-\tau) = \varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(t_1 - t_2)$ | **(Schwache) Stationarität** | **Starke Stationarität** $E(X(t)) = const$ | **Kovarianz** $cov(X,Y) = E([X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$

**Gemeinsame Stationarität von X(t) & Y(t)** ① X(t) stationär, Y(t) stationär ② $\varphi_{XY}(t_1,t_2) = \varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(-\tau)$

**Korrelationskoeffizient** $\rho_{XY}$ $\rho_{XY} = cov(X,Y)/[D(X) \cdot D(Y)]$ | $cov(X,Y) = \rho_{XY} \sigma_X \cdot \sigma_Y$

**Unkorreliert / Unabhängig Eigenschaften:** unkorreliert $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0 \Leftarrow$ unabhängig. Aus X, Y normalverteilt & $\rho_{XY} = 0$ folgt Unabhängigkeit von X und Y *

**Kovarianzmatrix** $\vec{X} = [X_1, \dots, X_N]^T$

$\Sigma_N = \begin{pmatrix} cov(x_1,x_1) & cov(x_1,x_2) & \cdots & cov(x_1,x_N) \\ cov(x_2,x_1) & cov(x_2,x_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \\ cov(x_N,x_1) & \cdots & & cov(x_N,x_N) \end{pmatrix}$

2D: $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

**Poissonprozess** $X(t), t \ge 0$ mit Intensität $\lambda$. Für $X(0) = 0$ gilt

$P(X(t) = K) = \frac{(\lambda t)^K}{K!} e^{-\lambda t}$

→ Bedingte Wahrscheinlichkeit ($t_2 \ge t_1, n \ge m$)

→ Vergangenes: Poissonverteilt

$P(X(t_2) = n | X(t_1) = m = P(X(t_2 - t_1) = n - m)$

→ Zukünftiges: Binomialverteilt

$P(X(t_1) = m | X(t_2) = n) = \binom{n}{m} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-m}$

**Markofketten** (homogen) $\vec{p}^T(t+K) = \vec{p}^T(t) \cdot P^K$ mit $P \hat{=} \begin{matrix} V & NACH \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$ ↳ Übergangsmatrix

**Mittlere Dauer** einer Irrfahrt bis zur Absorbtion im Rand ($m_R = 0$)

$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{N} p_{ik} m_k$

**mittlere Rate** $= 1/m_i$ | **Eigenwertproblem** | **Stationäre Verteilung / Fixvektor** $\lambda \hat{=} 1$

• Zustandsverteilung (→ nun nicht ↑)

$P^T \vec{p} = \vec{p} \Leftrightarrow (P^T - 1 \cdot I)\vec{p} = 0$ mit

mit $\vec{p}^T = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ mit $1 \hat{=} p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

* Allgemein Hypergeometrische Vert. $\frac{\binom{M_1}{k_1}\binom{M_2}{k_2}\cdots\binom{M_n}{k_n}\binom{N-M_1-M_2-\dots-M_n}{n-k_1-k_2-\dots-k_n}}{\binom{N}{n}}$

**Hauptachsen & Winkel**

$A = 2a = 2\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{(1-\rho)^2}{\sigma_1^2 \sin^2\gamma + \sigma_2^2 \cos^2\gamma + 2\sigma_1\sigma_2 \sin\gamma \cos\gamma}}$

$B = 2b = 2\sigma_1\sigma_2 \sqrt{\frac{(1-\rho)^2}{\sigma_1^2 \cos^2\gamma + \sigma_2^2 \sin^2\gamma - 2\sigma_1\sigma_2 \sin\gamma \cos\gamma}}$

$\gamma = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)$

**Primzahlen** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103

**Zwischenankunftzeit** – Exponentialverteilt: $P(X(t+\tau) > K | X(t) = K) = 1 - P(X(\tau) = 0)$

**Ankunftzeit** $T_n$ Erlangverteilt (Ordnung n) $f_{T_n}(t) = \lambda \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$ | $F_{T_n}(t) = P(T_n < t)$