Karlsruhe Institute of Technology

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Prof. Dr.rer.nat. Friedrich K. Jondral

CEL

3. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Wintersemester 2010/11)

Aufgabe 13

Ein Elektron kann die zwei diskreten Energiezustände $E_T = E_1 = 1$ und $E_T = E_2 = 2$ annehmen. Die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Elektron in einem der beiden Energiezustände befindet, sind $P\left(E_T = E_1 = 1\right) = 0{,}3$ und $P\left(E_T = E_2 = 2\right) = 0{,}2$. Das Elektron besitzt ein kontinuierliches Energiespektrum, falls die Elektronenenergie E_T größer als die Bindungsenergie $E_3 = 3$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, ein infinitesimales Energieintervall für $E_T > E_3$ anzunehmen, ist:

$$P\left(e_T < E_T \leq e_T + de_T\right) = dF\left(e_T\right) = f\left(e_T\right) de_T \tag{1}$$

mit

$$f\left(e_T\right) = e^{-2(e_T - E_3)} \tag{2}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E\left(E_T\right)$.

b) Bestimmen Sie den Median. Ist dieser eindeutig?

Aufgabe 14

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X, für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a,b \in \mathbf{R}$ folgende Beziehungen:

a) $E(Y) = aE(X) + b$

b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$

c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Aufgabe 15

Gegeben sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man berechne die Dichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y = 2 - X^3$.

Aufgabe 16

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Man bestimme den Faktor a.

b) Man berechne die Dichte und die Verteilungsfunktion von $Y = e^{-X}$.

c) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 17

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x|}$$

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von $\varphi(s)$ die Varianz $D^2(X)$.

Aufgabe 18

Gegeben sei die diskrete, poissonverteilte Zufallsvariable X, die die Werte $K = 0, 1, 2, ...$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} \quad e^{-\lambda} \qquad ,\lambda > 0$$

annimmt.

a) Man berechne die charakteristische Funktion $\varphi(s)$ der Poissonverteilung.

b) Man berechne mit Hilfe von $\varphi(s)$ den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $D^2(X)$.

Übungstermine: 08.11.10, 22.11.10, **06.12.10**, 20.12.10, 10.01.11, 24.01.11, 07.02.11