Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Prof. Dr.rer.nat. Friedrich K. Jondral

5. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Wintersemester 2010/11)

Aufgabe 25

Die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{Z} = (X;Y)^T$ sei im Gebiet G aus Abbildung 1 wie folgt verteilt

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{für } x,y \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

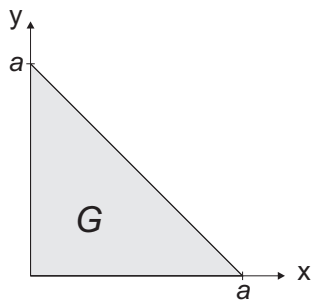

Abbildung 1: Gebiet G.

a) Berechnen Sie a.

b) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$, $f_Y(y)$ und die Verteilungsfunktionen $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

c) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

Aufgabe 26

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X,Y)^T$ habe die gemeinsame Dichte

$$f(x,y) = x + y, \qquad 0 \leq x,y \leq 1$$

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten $\varrho(X,Y)$ von X und Y.

Aufgabe 27

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X;Y)^T$ sei über der in Abbildung 2 dargestellten Fläche gleichverteilt.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

b) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

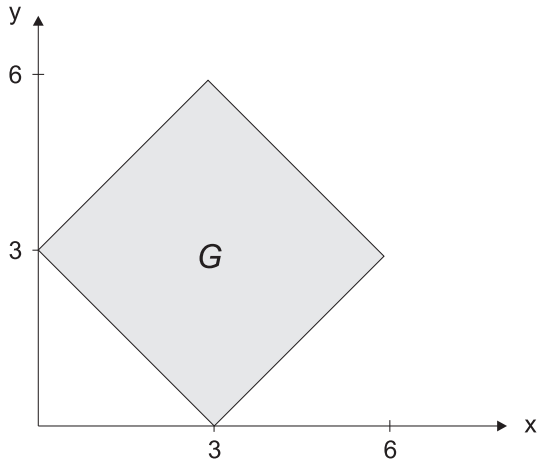

Abbildung 2: Verteilungsfunktion von $(X;Y)^T$.

Aufgabe 28

$\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Auch die Koordinaten X_1 und X_2 seien normalverteilte Zufallsvariablen. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel $\gamma = \frac{1}{2}\text{arctan}\left(\frac{2\rho_{x_1,x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2}\right)$ gedreht sind, vgl. Abbildung 3. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung ist, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

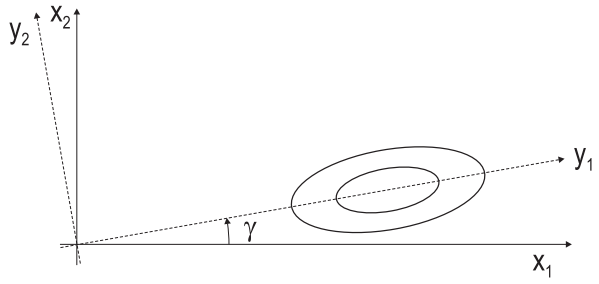

Abbildung 3: Drehung des Koordinatensystems um γ.

Aufgabe 29

Das komplexe Rauschen $\mathbf{N} = N_R + jN_I$ eines komplexen Signals $\mathbf{S} = S_R + jS_I$ kann durch die Eigenschaften der Inphasekomponente N_R und Quadraturkomponente N_I beschrieben werden. N_R und N_I sind unabhängig und unterliegen beide einer mittelwertfreien Normalverteilung $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

a) Um den Einfluss des Rauschens $\mathbf{N}$ auf das Signal $\mathbf{S}$ beurteilen zu können, berechnen Sie die Dichte von der Amplitude $|\mathbf{N}|$.

b) Um eine Aussage über den Phasenfehler des Signals $\mathbf{S}$ machen zu können, müssen Sie die Dichte des Argumentes Φ_N von $\mathbf{N}$ bestimmen.

Übungstermine: 08.11.10, 22.11.10, 06.12.10, 20.12.10, **10.01.11**, 24.01.11, 07.02.11