Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung

Zusammenfassung – 1. Übung

Kombinatorik: Auswahl von K aus N Elementen	Permutationen (Beachtung der Reihenfolge)	Kombinationen (keine Beachtung der Reihenfolge)	Variationen (Beachtung der Reihenfolge)
ohne Wiederholung	$N!$	$\binom{N}{K}$	$K!\binom{N}{K}$
mit Wiederholung	$\frac{N!}{K!}$	$\binom{N+K-1}{K}$	N^K

(Bild A-1)

- $\Omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$: Ergebnisraum
- $\{\xi_n\} \subset \Omega$: Elementarereignis (einelementige Teilmenge Ω)
- $A \subset \Omega$: Ereignis (Teilmenge von Ω)
- **Laplacesches Zufallsexperiment:** Alle Elementarereignisse $\{\xi_n\}\,; n = 1, \ldots, N$ eines endlichen Ergebnisraums $\Omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ treten **gleich häufig** auf. (Def. 2.2-2)
  Beim Laplacesches Zufallsexperiment gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:
  $$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse } \{\xi_n\} \subset \Omega}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{(Def. 2.2-3)}$$
- Für die Ereignisse A und B gilt:
  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ falls A und B unabhängig sind
  $$\left.\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}\right\} \text{de MORGAN}$$

Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung

Zusammenfassung – 2. Übung

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:** $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ mit $P(B) > 0$ (3.1-1)
- **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
  $$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n) \quad (3.1\text{-}5)$$
  (die A_n seien eine vollständige Ereignisdisjunktion und $P(A_n) > 0 \;\forall\; n$)
- Formel von **Bayes**: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$ (3.1-6)
- **Unabhängigkeit** (A und B sind voneinander unabhängig):
  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ (3.2-2)
- Eigenschaften einer **Dichte** $f(x)$: I. $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$ (4.1-5)
  II. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- **Verteilungsfunktion:** $F(x) := P(X \leq x)$ (4.1-3)
  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad (4.1\text{-}6)$$

Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung

Zusammenfassung – 3.Übung

	stetige ZV	diskrete ZV
Erwartungswert/ Mittelwert	$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	$E(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n p_n$
k–tes Moment	$E(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$	$E(X^k) \sum\limits_{n=1}^{\infty} {x_n}^k p_n$
k–tes zentrales Moment	$E([X - E(X)]^k) = = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx$	$E([X - E(X)]^k) = = \sum\limits_{n=1}^{\infty} [x_n - E(X)]^k p_n$
Varianz	$\mathrm{var}(X) = D^2(X) = E([X - E(X)]^2)$	
Charakt. Fkt. $\Rightarrow E(X^k) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{j^k}$	$\varphi(s) := E(e^{jsX})$	$\varphi(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p(X = x_n)$

Funktionen von ZV

$Y = g(X)$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$x_1, \ldots, x_N$ reelle Wurzeln von $y = g(x)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

Zusammenfassung – 4. Übung

	Normalverteilung ($\sigma>0$)	Exponentialvert. ($\lambda>0$)	Weibullvert. ($\beta>0;\Theta>0$)
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$	$\frac{\beta}{\Theta}\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta}\right]$ $x\ge 0$
$F(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt$ $=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$	$1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\Theta}\right)^{\beta}\right]$ $x\ge 0$
$E(x)$	μ	$\frac{1}{\lambda}$	$\Theta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$
$D^2(x)$	σ^2	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\Theta^2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Theta^2\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2$

Diskrete Verteilungen:

Poissonverteilung	Binomialverteilung	Hypergeometr. Vert.
$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$P(X_N=k)=\binom{N}{k}p^k\cdot(1-p)^{N-k}$	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$E(X)=\lambda$	$E(X_N)=N\cdot p$	Urne mit N Kugeln, davon
$D^2(X)=\lambda$	$D^2(X_N)=N\cdot p\cdot(1-p)$	M schwarz (o. Zurücklegen
	Für N groß bzw. p klein kann die Binomial-	Läßt sich für großes N mit
	vert. mit der Poissonvert. approx. werden.	Binomialvert. annähern

Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung!

Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung!

Zusammenfassung – 5. Übung

- **Randdichte** der zweidimensionalen ZV $\vec{X}$ mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1; x_2)$:
  $f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1; x_2) dx_2 \qquad f_{X_2}(x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1; x_2) dx_1$
- **Bedingte Dichte** von X_1: $f_{X_1}(x_1 | X_2 = x_2) = \frac{f(x_1; x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$
  ($f_{X_1}(x_1) > 0$ und $f_{X_2}(x_2) > 0$)
- Zwei ZV´en X, Y heißen **unabhängig**, wenn $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ gilt.
- **Kovarianz** der ZV´en X, Y: $\operatorname{cov}(X, Y) = E\{(X - E(X))(Y - E(Y))\}$
- **Korrelationskoeffizient** der ZV´en X, Y: $\rho_{X,Y} = \rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2(X) D^2(Y)}}$
- **Funktionen zweidimensionaler ZV´en**:
  - eindeutige Abbildungen U_1, U_2: $U_1 = g_1(X, Y); \quad U_2 = g_2(X, Y)$
  - Umkehrabb. : $x = h_1(u_1, u_2); \quad y = h_2(u_1, u_2)$ mit Jacobi–Determinante

    $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$ folgt: $h(u_1, u_2) = f[h_1(u_1, u_2); h_2(u_1, u_2)] \cdot |J|$
- X_1, X_2 normalverteilte, unabhängige ZV´en mit $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2); \quad n = 1, 2$
  $\Rightarrow X_1 + X_2 = Y$ ist $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$–verteilt.

Weitere Voraussetzungen siehe Vorlesung

Zusammenfassung – 6. Übung

- X, Y seien unabh. ZV´en mit den charakt. Fkt. $\varphi_X(s)$, $\varphi_Y(s)$. Die **charakt. Fkt.** der ZV: $Z = X + Y$ ist dann: $\varphi_Z(s) = \varphi_X(s) \cdot \varphi_Y(s)$ (Satz 7.4-2)

- **Additionssatz der Normalverteilung:**
  Die ZV´en X_n; $n = 1, 2, \ldots, N$ seien unabhängig und besitzen eine $\mathcal{N}(\mu_n; \sigma_n^2)$-Verteilung; dann hat
  $Y = \sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ eine $\mathcal{N}_Y(\sum\limits_{n=1}^{N} \mu_n; \sum\limits_{n=1}^{N} \sigma_n^2)$ -Verteilung. (Satz 7.7-1(i))

- **Zentraler Grenzwertsatz:**
  $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter ZV´en mit:
  $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X) = d^2 < \infty$ dann gilt mit $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} X_N$ für jedes $x \in \mathbb{R}$:
  $$\lim_{N \to \infty} P\left\{\frac{S_N - N \cdot m}{\sqrt{N} d} \le x\right\} = \Phi(x)$$ (Satz 7.8-4)

- **Spezialfall: leMoivre – Laplace**
  S_N sei eine binomialverteilte ZV, mit den Parametern N und p gilt:
  $$\lim_{N \to \infty} P\left\{\frac{S_N - N \cdot p}{\sqrt{N \cdot p \cdot (1 - p)}} \le x\right\} = \Phi(x)$$ (Satz 7.8-5)

Weitere Voraussetzungen
siehe Vorlesung

Zusammenfassung – 7. Übung

- $X(t)$ **stark stationär**, falls $f(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \ldots, x_{t_N+h}) = f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_N})$ für jedes h, N gilt. (8.1-1)
- $X(t)$ ist (schwach)**stationär**, falls der Erwartungswert konstant ist und $\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_2 - t_1) = \varphi_{XX}(\tau)$ (8.2-3)
- **Autokorrelationsfkt.** von $X(t)$:
  $$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_{t_1} \cdot x_{t_2} \cdot f(x_{t_1}, x_{t_2})\, dx_{t_1} dx_{t_2} \qquad (8.2\text{-}2)$$
- **Autokovarianzfkt.** von $X(t)$: $c_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)\}$ (8.2-4)
- **Kreuzkorrelationsfkt.** von $X(t)$: $\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1) \cdot Y(t_2)\}$ (8.2-5)
- **Kreuzkovarianzfkt.** von $X(t)$: $c_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{XY}(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\} \cdot E\{Y(t_2)\}$ (8.2-6)
- $X(t)$ und $Y(t)$ heißen **gemeinsam stationär**, wenn sowohl $X(t)$ als auch $Y(t)$ stationär ist und ihre KKF nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängt.
- $X(t)$ und $Y(t)$ heißen **stochast. unabhängig**, wenn $f_{XY}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_N}; y_{t'_1}, \ldots, y_{t'_M}) = f_X(x_{t_1} \ldots, x_{t_N}) \cdot f_Y(y_{t'_1}, \ldots, y_{t'_M})$ gilt. (beliebige $t_N, t'_M; \forall N, M \in \mathbb{N}$) (8.2-8)
- $X(t)$ und $Y(t)$ sind **unkorreliert**, wenn $\forall t_1, t_2$ gilt: $\varphi_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\} \cdot E\{Y(t_2)\} \rightarrow$ ist $\varphi_{XY}(t_1, t_2) = 0 \forall t_1, t_2$ so heißen $X(t)$ und $Y(t)$ **orthogonal**. (8.2-10)
- **Mittlere Leistung** eines Prozesses: $\varphi_{XX}(0) = E\{X^2(t)\}$
- $X(t)$ sei ein stationärer stochastischer Prozess mit der AKF $\varphi_{XX}(\tau)$. Dann heißt
  $\Phi_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ **Leistungsdichtespektrum** von $X(t)$ (8.5-1)
- **Weißes Gaußsches Rauschen**: mittelwertfreier, stationärer Gaußprozess, dessen Leistungsdichtespektrum konstant über der Frequenz ist $\Rightarrow \Phi_{XX}(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$ (9.1-1)