Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 2
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 6

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ mit $\Omega = \{\heartsuit, \square, \mathrm{O}, \times, \triangle\}$, $\mathcal{B} \supset M = \big\{\{\heartsuit\}, \{\square, \triangle\}\big\}$ und der Funktion $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$.

a) Geben Sie die kleinste von M erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ an.

b) Es sei $P(\{\heartsuit\}) = 0{,}1$ und $P(\{\square, \triangle\}) = 0{,}2$. Definieren Sie P auf $\mathcal{B}$ vollständig.

Die Menge M wird nun so erweitert, dass alle Elementarereignisse $\{\xi\}$ mit $\xi \in \Omega$ enthalten sind.

c) Geben Sie die kleinste von der erweiterten Menge M erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ an.

d) Definieren Sie eine Zufallsvariable X über Ω, die ganze Zahlen annimmt.

Aufgabe 7

Eine Population gelber Zeichentrickfiguren, die *Minions*, werde nach den Merkmalen Körpergröße und Augenanzahl unterschieden: 80% haben zwei Augen, die anderen nur eins. Von den zwei-äugigen werden 20% als groß angesehen, 70% als mittelgroß und der Rest als klein. Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und der Rest klein.

a) Wie groß ist der Anteil der jeweiligen Körpergrößen an der gesamten Minion-Population?

b) Für eine besondere Aufgabe wird eines der Minions zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass es sich nicht um ein kleines Minion handelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das ausgewählte Minion einäugig?

Aufgabe 8

Ein Schimpanse hat zwei Urnen vor sich: Urne 1 enthält drei weiße und zwei schwarze, Urne 2 eine weiße, zwei grüne und zwei rote Kugeln. Über das Verhalten des Schimpansen ist bekannt, dass er mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in die erste und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in die zweite Urne greift.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schimpanse eine weiße Kugel zieht?

b) Welches Verhalten müsste der Schimpanse bei der Wahl der Urne haben, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 eine weiße Kugel zieht?

c) Der Schimpanse darf nun solange Kugeln (ohne Zurücklegen) ziehen, bis er eine rote Kugel wählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er maximal drei Kugeln zieht?

Aufgabe 9

Ein dreistelliger, binärer Zufallsgenerator ist aus drei unabhängigen 0,1-Zählern aufgebaut. Bei jedem Zähler treten die Null und die Eins gleichwahrscheinlich auf.

a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der entsprechenden Dezimalzahlen.

b) Um die Wahrscheinlichkeitsdichte zu verändern werden die Ausgänge zweier Zufallsgeneratoren additiv miteinander verbunden. Berechnen und zeichnen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 10

a) Gegeben sei die Funktion $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} x^2 e^{-\alpha x^2} & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Für welches α ist $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Man zeige, dass durch

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2}, \quad \lambda > 0$$

eine Dichte gegeben ist.

c) Man berechne die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ der Zufallsvariablen Y, die $f_Y(y)$ als Dichte besitzt.