Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 5
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 21

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X \quad Y)^T$ sei über der in Abbildung 4 dargestellten Fläche gleichverteilt.

a) Geben Sie die Dichte $f_{XY}(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X < 4$, wenn $Y = 4$ ist.

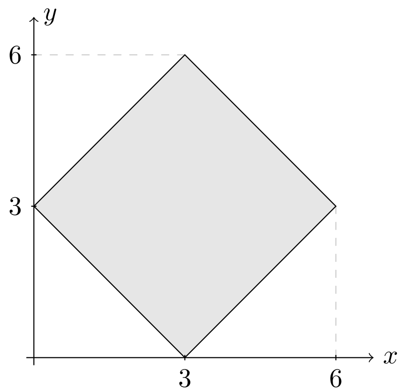

Abbildung 4: Verteilungsfunktion von $(X;Y)^T$.

Aufgabe 22

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1 \quad X_2)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\vec{k}^T\vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi/\alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\alpha \quad 1)^T$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizzieren Sie G und geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

c) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$ für $\alpha = 1$.

Aufgabe 23

$\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Auch die Koordinaten X_1 und X_2 seien normalverteilte Zufallsvariablen. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\rho_{x_1,x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2}\right)$$

gedreht sind, vgl. Abbildung 5. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung ist, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

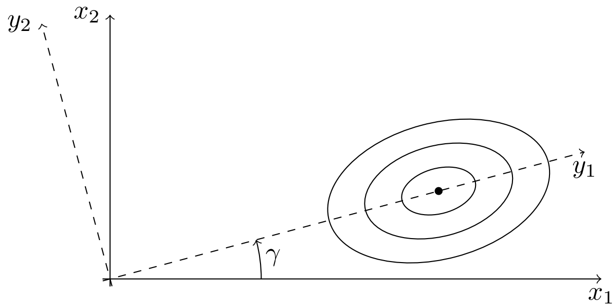

Abbildung 5: Drehung des Koordinatensystems um γ.