Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 7
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 28

Es sei $X(t)$, $t > 0$ ein stochastischer Prozess mit der Verteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right\}, \quad x \geq 0.$$

Die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$, $(t_1, t_2 > 0)$ sei

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = 4\,\frac{x_{t_1}\,x_{t_2}}{t_1^2\,t_2^2}\,\exp\left\{-\left[\left(\frac{x_{t_1}}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{t_2}}{t_2}\right)^2\right]\right\}, \qquad x_{t_1}, x_{t_2} \geq 0$$

a) Man berechne $E\{X(t)\}$ dieses Prozesses.

b) Man berechne die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$.

c) Ist der Prozess schwach stationär? Ist er stark stationär?

Aufgabe 29

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $X(\xi, t) = A(\xi)\exp[j2\pi f_0 t + jY(\xi)]$, wobei f_0 eine reelle Konstante ist. Die Zufallsvariablen A und Y seien stochastisch unabhängig. Y sei im Intervall $[-\pi, \pi)$ gleichverteilt, A sei normalverteilt mit dem Erwartungswert null. Man bestimme

a) die Autokorrelationsfunktion und

b) die spektrale Leistungsdichte des Prozesses $X(\xi, t)$.

c) Nun sei A ein stochastischer Prozess $A(\xi, t)$, weiterhin unabhängig von Y und $\varphi_{AA}(\tau) = \mathrm{si}(\pi B\tau)$ mit $B > 0$. Wie verändern sich dadurch die Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben?

Aufgabe 30

Gegeben sind die beiden stochastischen Prozesse

$$x(\xi,t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t + \Psi_1(\xi)) \text{ und}$$
$$y(\xi,t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t + \Psi_2(\xi)).$$

Die Zufallsvariablen $\Psi_1(\xi)$ und $\Psi_2(\xi)$ haben die Dichten

$$f_{\Psi_i}(\psi_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } -\pi \leq \psi_i < \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad, i = 1,2$$

Man bestimme das Kreuz-Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XY}(f)$ für den Fall, dass

a) $\Psi_1(\xi)$ und $\Psi_2(\xi)$ unabhängig sind.

b) $\Psi_1(\xi) = \Psi_2(\xi) = \Psi(\xi)$ gilt.

Aufgabe 31

Gegeben ist ein mittelwertfreier, komplexwertiger stochastischer Prozess $Z(t) = X(t) + jY(t)$. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Komponentenprozesse $X(t)$ und $Y(t)$ sind gemeinsam stationär.

(ii) Für die Autokorrelationsfunktion von Z gilt $\varphi_{ZZ^*}(t_1, t_2) = \varphi_{ZZ^*}(t_1 - t_2)$.

Aufgabe 32

$X(n)$ sei ein mittelwertfreier, zeitdiskreter stationärer Zufallsprozess mit der mittleren Leistung $\varphi_{XX}(0) = \sigma_x^2$, dessen Werte für Zeiten $n_1 \neq n_2$ unkorreliert sind.

a) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}(m)$ an.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(m)$ von $Y(n) = \frac{1}{2}[X(n) + X(n-1)]$.

c) Zeichnen Sie φ_{XX} und φ_{YY} in dasselbe Koordinatensystem.