1. Übung Wahrscheinlichkeitstheorie

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 1

Drei Bits werden über einen digitalen Nachrichtenkanal übertragen. Jedes Bit kann verfälscht oder richtig empfangen werden.

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω an. Wieviele Elemente besitzt Ω?

b) Es sei $A_i = \{i\text{-tes Bit ist verfälscht}\};\ \ i = 1, 2, 3$. Geben Sie A_1 an.

c) Stellen Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der A_i und passender Mengenoperationen dar:

$$B_1 = \{\text{alle Bits sind verfälscht}\}$$
$$B_2 = \{\text{mindestens ein Bit ist verfälscht}\}$$
$$B_3 = \{\text{kein Bit ist verfälscht}\}$$
$$B_4 = \{\text{höchstens ein Bit ist verfälscht}\}$$

d) Beschreiben Sie verbal folgende Ereignisse:

$$C_1 = A_1 \cap (\overline{A_2 \cap A_3})$$
$$C_2 = (\overline{A_3} \cap A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_2} \cap A_1 \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

Aufgabe 2

a) In dem aus vier Rechnern bestehenden Rechnernetz A (Abbildung 1) fallen zufällig zwei Verbindungen V_i aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotz des Ausfalls noch drei Rechner miteinander verbunden sind?
Bemerkung: Alle Verbindungen haben die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Rechnernetz B (Abbildung 2) alle Rechner noch verbunden sind, wenn höchstens drei Verbindungen ausfallen?
Bemerkung: Alle möglichen Ausfälle haben die gleiche Wahrscheinlichkeit (Zufallsexperiment nach Laplace).

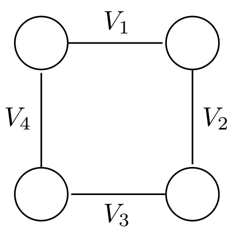

Abbildung 1: Rechnernetz A

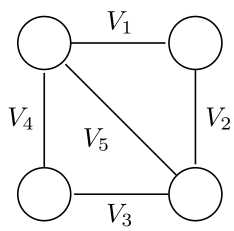

Abbildung 2: Rechnernetz B

Aufgabe 3

Im Folgenden seien Wiederholungen ausgeschlossen.

a) Wieviele dreistellige Zahlen kann man mit Hilfe der sechs Ziffern 2, 3, 5, 6, 7, 9 bilden?

b) Wieviele davon sind kleiner als 400?

c) Wieviele sind ungerade?

Aufgabe 4

In einer Lostrommel befinden sich 80 Nieten und 20 Gewinne. Von den 20 Gewinnen ist einer der Hauptgewinn. Es werden vier Lose gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) der Hauptgewinn gezogen wird.

b) mindestens ein gezogenes Los ein Gewinn ist.

c) höchstens ein gezogenes Los ein Gewinn ist.

d) man genau einen Gewinn zieht, der aber nicht der Hauptgewinn ist.

Aufgabe 5

Ein elektronisches Schaltwerk (Abbildung 3) besteht aus 5 Relais $(1, \ldots, 5)$. Jedes Relais ist mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}5$ geschlossen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom vom Eingang E zum Ausgang A fließen?

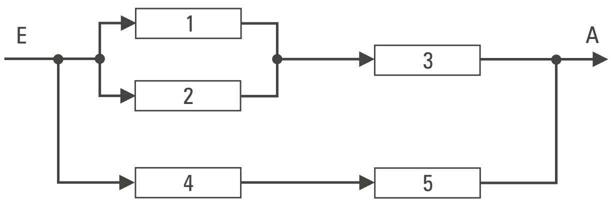

Abbildung 3: Elektronisches Schaltwerk

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 2
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 6

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ mit $\Omega = \{\heartsuit, \square, \mathrm{O}, \times, \triangle\}$, $\mathcal{B} \supset M = \big\{\{\heartsuit\}, \{\square, \triangle\}\big\}$ und der Funktion $P : \mathcal{B} \to [0, 1]$.

a) Geben Sie die kleinste von M erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ an.

b) Es sei $P(\{\heartsuit\}) = 0{,}1$ und $P(\{\square, \triangle\}) = 0{,}2$. Definieren Sie P auf $\mathcal{B}$ vollständig.

Die Menge M wird nun so erweitert, dass alle Elementarereignisse $\{\xi\}$ mit $\xi \in \Omega$ enthalten sind.

c) Geben Sie die kleinste von der erweiterten Menge M erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ an.

d) Definieren Sie eine Zufallsvariable X über Ω, die ganze Zahlen annimmt.

Aufgabe 7

Eine Population gelber Zeichentrickfiguren, die *Minions*, werde nach den Merkmalen Körpergröße und Augenanzahl unterschieden: 80% haben zwei Augen, die anderen nur eins. Von den zwei-äugigen werden 20% als groß angesehen, 70% als mittelgroß und der Rest als klein. Von den einäugigen Minions sind 5% groß, 60% mittelgroß und der Rest klein.

a) Wie groß ist der Anteil der jeweiligen Körpergrößen an der gesamten Minion-Population?

b) Für eine besondere Aufgabe wird eines der Minions zufällig ausgewählt. Man stellt fest, dass es sich nicht um ein kleines Minion handelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das ausgewählte Minion einäugig?

Aufgabe 8

Ein Schimpanse hat zwei Urnen vor sich: Urne 1 enthält drei weiße und zwei schwarze, Urne 2 eine weiße, zwei grüne und zwei rote Kugeln. Über das Verhalten des Schimpansen ist bekannt, dass er mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in die erste und mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 in die zweite Urne greift.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schimpanse eine weiße Kugel zieht?

b) Welches Verhalten müsste der Schimpanse bei der Wahl der Urne haben, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 eine weiße Kugel zieht?

c) Der Schimpanse darf nun solange Kugeln (ohne Zurücklegen) ziehen, bis er eine rote Kugel wählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er maximal drei Kugeln zieht?

Aufgabe 9

Ein dreistelliger, binärer Zufallsgenerator ist aus drei unabhängigen 0,1-Zählern aufgebaut. Bei jedem Zähler treten die Null und die Eins gleichwahrscheinlich auf.

a) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte der entsprechenden Dezimalzahlen.

b) Um die Wahrscheinlichkeitsdichte zu verändern werden die Ausgänge zweier Zufallsgeneratoren additiv miteinander verbunden. Berechnen und zeichnen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgabe 10

a) Gegeben sei die Funktion $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha}x^2 e^{-\alpha x^2} & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Für welches α ist $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Man zeige, dass durch

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (y - \mu)^2}, \quad \lambda > 0$$

eine Dichte gegeben ist.

c) Man berechne die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ der Zufallsvariablen Y, die $f_Y(y)$ als Dichte besitzt.

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 3
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 10

a) Gegeben sei die Funktion $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha} x^2 e^{-\alpha x^2} & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

b) Man zeige, dass durch

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (y-\mu)^2}, \quad \lambda > 0$$

eine Dichte gegeben ist.

c) Man berechne die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ der Zufallsvariablen Y, die $f_Y(y)$ als Dichte besitzt.

Aufgabe 11

Mittels eines Sensors soll die zufällige Größe X gemessen werden. Die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Messung stehen zwei verschiedene Modelle zur Verfügung: Sensor I setzt alle Werte $x \leq 2$ fehlerfrei auf den Ausgang um. Für alle anderen Werte wird der Sensor übersteuert und es wird nur der Maximalwert 2 ausgegeben. Das alternative Modell, Sensor II, hat identische Funktionalität, allerdings können Werte bis $x = 3$ fehlerfrei ausgegeben werden.

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung p_c soll maximal 2% sein. Reicht der Arbeitsbereich von Sensor I aus oder muss der hochwertigere Sensor II verwendet werden?

b) Man gebe die Dichte $f_Y(y)$ der vom verwendeten Sensor ausgegebenen Messwerte Y an.

c) Um wie viel Prozent verschiebt sich der Erwartungswert der ausgegebenen Werte Y im Vergleich zu $E(X)$?

Aufgabe 12

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X, für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ folgende Beziehungen:

a) $E(Y) = aE(X) + b$

b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$

c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Aufgabe 13

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man bestimme den Faktor a.

b) Man berechne die Dichte und die Verteilungsfunktion von $Y = e^{-X}$.

c) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 14

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x|}$$

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von $\varphi(s)$ die Varianz $D^2(X)$.

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 4
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 16

Eine CPU funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von $P_{\text{CPU}} = 10^{-2}$ innerhalb der Garantiezeit nicht mehr. Ein Händler möchte nun berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit P_{defekt} ist, dass er von seinen 200 verkauften CPUs höchstens 2 zurücknehmen muss.

a) Was für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Begründung!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_{defekt}?

c) Gibt es eine Verteilung, die das Problem approximiert? Wenn ja, welche? (Begründung!)
Wie groß ist der Approximationsfehler?

Aufgabe 17

Ein Glücksrad mit sieben gleich häufig auftretenden Feldern (1...7) werde 15 mal gedreht. Dabei wird gezählt wie oft die jeweiligen Felder angezeigt werden.

a) Was für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt vor? Begründung!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten dabei genau viermal Feld 1, zweimal Feld 2 und einmal Feld 6 auf?

Ein anderes Glücksrad hat sieben logarithmisch-verteilte Felder: Ausgehend von Feld 1 tritt jedes folgende nur so halb häufig auf wie das vorherige.

c) Geben Sie die „Dichte“ der bei einmaligem drehen des Glücksrads angezeigten Feldnummer an.

d) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für das Ereignis aus Aufgabenteil b) für dieses Glücksrad?

Aufgabe 18

In einem Produktionsprozess werden Ladegeräte für Mobiltelefone hergestellt. Bevor die Ladegeräte mit den Mobiltelefonen zusammen verpackt werden, wird die Ladespannung von jedem Ladegerät einmal gemessen. Die Messwerte der Ladespannungen der verschiedenen Ladegeräte genüge näherungsweise einer normalverteilten Zufallsvariablen mit $\mu = 4{,}5$ Volt und $\sigma = 0{,}07$ Volt. Alle Ladegeräte, bei denen die Messung um mehr als 5 % vom Sollwert $\mu_{\text{SW}} = 4{,}5$ Volt abweicht, sollen aussortiert werden.

a) Wie viel Prozent der Ladegeräte werden aussortiert?

b) Der Hersteller möchte seinen Produktionsprozess so verbessern, dass nur noch halb soviele Ladegeräte wie in a) aussortiert werden. Auf welchen Wert müsste er dazu σ senken?

c) Durch einen Produktionsfehler verschiebt sich der Mittelwert μ auf $4{,}6$ Volt (σ ist $0{,}07$ Volt). Wie groß ist jetzt der Prozentsatz, der aussortiert wird?

Aufgabe 19

Die Zerfallszeit X einer radioaktiven Substanz ist eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Unter der Halbwertszeit versteht man diejenige Zeit, in der $50\ \%$ der radioaktiven Substanz zerfallen ist. Dies ist der Median der Zufallsgröße X. Für Radon beträgt die Halbwertszeit $3{,}83$ [Tage].

a) Bestimmen Sie den Parameter λ dieser Exponentialverteilung.

b) Nach welcher Zeit sind $95\ \%$ der Atome zerfallen?

Aufgabe 20

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y. X sei über dem Intervall $(900; 1100]$, Y über dem Intervall $(1000; 1400]$ gleichverteilt.

a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X und Y an.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Dichte von $Z = X + Y$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $X + Y > 2250$ ist.

d) Geben Sie die Verteilungsfunktion von Z an.

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 5
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 21

Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X \quad Y)^T$ sei über der in Abbildung 4 dargestellten Fläche gleichverteilt.

a) Geben Sie die Dichte $f_{XY}(x,y)$ an.

b) Berechnen Sie die Randdichte und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X < 4$, wenn $Y = 4$ ist.

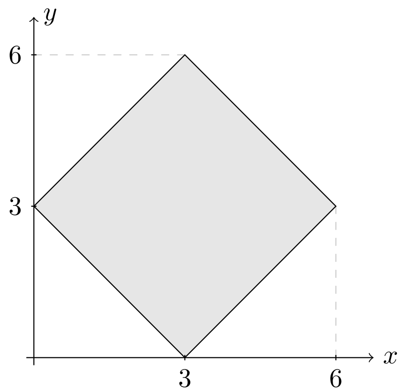

Abbildung 4: Verteilungsfunktion von $(X; Y)^T$.

Aufgabe 22

Gegeben sind die zweidimensionale Zufallsvariable $\vec{X} = (X_1 \quad X_2)^T$ mit der Dichte $f_{\vec{X}}(\vec{x})$ und die Gerade h:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi} \sin(\vec{k}^T \vec{x}) & \text{für } \vec{x} \in G \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \pi/\alpha \\ -\pi \end{pmatrix}$$

Das Gebiet G wird durch die Koordinatenachsen und h begrenzt. $\vec{k} = (\alpha \quad 1)^T$ mit $\alpha > 0$.

a) Skizzieren Sie G und geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$ an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

c) Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(X_2 < X_1)$ für $\alpha = 1$.

Aufgabe 23

$\vec{X} = (X_1, X_2)^T$ sei zweidimensional normalverteilt mit der Dichte $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$. Auch die Koordinaten X_1 und X_2 seien normalverteilte Zufallsvariablen. Die Höhenlinien von $f(\vec{x})$ sind Ellipsen, deren Hauptachsen gegenüber den Koordinatenachsen um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2}\text{arctan}\left(\frac{2\rho_{x_1,x_2}\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_2}^2}\right)$$

gedreht sind, vgl. Abbildung 5. Durch die Drehung des Koordinatensystems um den Winkel γ wird die Zufallsvariable $\vec{X}$ auf die Zufallsvariable

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2)^T = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \vec{X}$$

abgebildet. Da die Drehung eine lineare Abbildung ist, ist offensichtlich auch $\vec{Y}$ zweidimensional normalverteilt. Zeigen Sie, dass Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen sind!

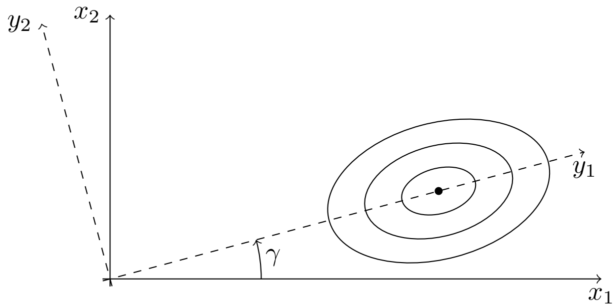

Abbildung 5: Drehung des Koordinatensystems um γ.

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 6
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 24

Die Zufallsvariable $(X \;\; Y)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x,y) = x + y$ für $x, y \in [0;1]$ und null sonst.

a) Man berechne die Dichte von $Z = X \cdot Y$.

b) Man berechne den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Y}$.

Aufgabe 25

Das additive komplexe Rauschen $\mathbf{N} = N_R + jN_I$ eines komplexen Signals $\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$ kann durch die Eigenschaften der Inphasekomponente N_R und Quadraturkomponente N_I beschrieben werden. N_R und N_I sind unabhängig und unterliegen beide einer mittelwertfreien Normalverteilung $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Um den Einfluss des Rauschens $\mathbf{N}$ auf das Signal $\mathbf{R}$ beurteilen zu können, berechne man

a) die Dichte der Amplitude $|\mathbf{N}|$ und

b) die Dichte des Argumentes $\Phi_N = \arctan\left(\frac{N_I}{N_R}\right)$ von $\mathbf{N}$.

Das komplexe Sendesignal $\mathbf{S}$ ist zufällig und entspricht einem der gleichwahrscheinlichen Sendesymbole $s_n = \exp\left(j\pi\frac{2n+1}{4}\right)$ mit $n \in \{0,1,2,3\}$.

c) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene einige Höhenlinien der Dichte des Empfangssignals $\mathbf{R}$.

Aufgabe 26

Im Werk einer Zahnradfabrik werden verschiedene Präzisionsmetallteile hergestellt. Während einer Schicht werden 5000 Stück eines Typs A hergestellt. Bei der Qualitätskontrolle werden 3% dieser Teile als defekt klassifiziert und aussortiert.

a) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass während einer Schicht zwischen 125 und 180 Teile aussortiert werden?

b) Die aussortierten Teile werden nach Schichtende zur Wiederverwertung in einem Kessel auf einmal eingeschmolzen. Wie viele Teile muss der Kessel fassen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 nicht überfüllt ist?

Aufgabe 27

X_i sei das Ergebnis der i-ten Messung $(i = 1, 2, \cdots)$ einer physikalischen Kenngröße. Die X_i seien Zufallsvariablen mit der Standardabweichung σ.

a) Wie viele voneinander unabhängige Messungen der Kenngröße müssen durchgeführt werden, damit das arithmetische Mittel der Meßergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 dem Betrage nach um weniger als 0.2σ vom Erwartungswert der Kenngröße abweicht?

b) Wie lautet das Ergebnis, wenn bekannt ist, dass die X_i normalverteilt sind?

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 7
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 28

Es sei $X(t)$, $t > 0$ ein stochastischer Prozess mit der Verteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right\}, \quad x \geq 0.$$

Die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$, $(t_1, t_2 > 0)$ sei

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = 4\,\frac{x_{t_1}\,x_{t_2}}{t_1^2\,t_2^2}\,\exp\left\{-\left[\left(\frac{x_{t_1}}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{t_2}}{t_2}\right)^2\right]\right\}, \qquad x_{t_1}, x_{t_2} \geq 0$$

a) Man berechne $E\{X(t)\}$ dieses Prozesses.

b) Man berechne die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$.

c) Ist der Prozess schwach stationär? Ist er stark stationär?

Aufgabe 29

Gegeben sei ein stochastischer Prozess $X(\xi, t) = A(\xi)\exp[j2\pi f_0 t + jY(\xi)]$, wobei f_0 eine reelle Konstante ist. Die Zufallsvariablen A und Y seien stochastisch unabhängig. Y sei im Intervall $[-\pi, \pi)$ gleichverteilt, A sei normalverteilt mit dem Erwartungswert null. Man bestimme

a) die Autokorrelationsfunktion und

b) die spektrale Leistungsdichte des Prozesses $X(\xi, t)$.

c) Nun sei A ein stochastischer Prozess $A(\xi, t)$, weiterhin unabhängig von Y und $\varphi_{AA}(\tau) = \mathrm{si}(\pi B\tau)$ mit $B > 0$. Wie verändern sich dadurch die Ergebnisse der ersten beiden Teilaufgaben?

Aufgabe 30

Gegeben sind die beiden stochastischen Prozesse

$$x(\xi,t) = 1 + \sin(2\pi f_0 t + \Psi_1(\xi)) \text{ und}$$
$$y(\xi,t) = 1 + \cos(2\pi f_0 t + \Psi_2(\xi)).$$

Die Zufallsvariablen $\Psi_1(\xi)$ und $\Psi_2(\xi)$ haben die Dichten

$$f_{\Psi_i}(\psi_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{für } -\pi \leq \psi_i < \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad , i = 1,2$$

Man bestimme das Kreuz-Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XY}(f)$ für den Fall, dass

a) $\Psi_1(\xi)$ und $\Psi_2(\xi)$ unabhängig sind.

b) $\Psi_1(\xi) = \Psi_2(\xi) = \Psi(\xi)$ gilt.

Aufgabe 31

Gegeben ist ein mittelwertfreier, komplexwertiger stochastischer Prozess $Z(t) = X(t) + jY(t)$. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Komponentenprozesse $X(t)$ und $Y(t)$ sind gemeinsam stationär.

(ii) Für die Autokorrelationsfunktion von Z gilt $\varphi_{ZZ^*}(t_1, t_2) = \varphi_{ZZ^*}(t_1 - t_2)$.

Aufgabe 32

$X(n)$ sei ein mittelwertfreier, zeitdiskreter stationärer Zufallsprozess mit der mittleren Leistung $\varphi_{XX}(0) = \sigma_x^2$, dessen Werte für Zeiten $n_1 \neq n_2$ unkorreliert sind.

a) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}(m)$ an.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(m)$ von $Y(n) = \frac{1}{2}[X(n) + X(n-1)]$.

c) Zeichnen Sie φ_{XX} und φ_{YY} in dasselbe Koordinatensystem.

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 8
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 33

Es sei bekannt, dass die Anzahl $X(t)$ der Störungen in einem Rechnernetz im Intervall $[0, t)$ einem Poissonprozess mit der mittleren Ankunftsrate $\lambda = 0{,}25$ [h^{-1}] folgt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 8 Stunden höchstens eine Störung auf?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechnernetz 10 Stunden ohne Störung funktioniert?

c) Die Folge von Zufallsvariablen T_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem die n-te Störung stattfindet. Man berechne die Dichte von T_n.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung nach 8 Stunden auf?

Aufgabe 34

Gegeben ist der Poissonprozess $X(t)$ mit dem Parameter λ, der die Anzahl der Ereignisse im Intervall $[0, t)$ beschreibt.

a) Zu zeigen ist folgende Behauptung: Die Wahrscheinlichkeiten, dass im Intervall $[0, s)$ genau i Ereignisse auftreten unter der Bedingung, dass im Intervall $[0, t)$, $t > s$ genau n Ereignisse eintreten für $i = 1{,}2, \ldots ,n$ genügen einer Binomialverteilung mit den Parametern $p = \frac{s}{t}$ und n.

b) Nun sei $\lambda = 3$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten mindestens zwei Ereignisse in $[0;\ 0{,}5)$ auf, wenn bekannt ist, dass in $[0;\ 1)$ genau vier Ereignisse eintreten. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn dies nicht bekannt ist?

Aufgabe 35

Abbildung 6 zeigt den Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ an.

b) Im n-ten Zeitschritt gilt für die Zustandsverteilung $\vec{p}_n^{\,T} = (0{,}7;\ 0{,}1;\ 0{,}2)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Prozess zwei Schritte später nicht im zweiten Zustand?

Um die mittlere zu erwartende Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Zustand zu berechnen, wird der stochastische Vektor $\vec{\Pi}$ gesucht, für den $\vec{\Pi}^T = \vec{\Pi}^T \cdot \mathbf{P}$ gilt.

c) Man beschreibe diesen Zusammenhang als Eigenwertproblem und zeige, dass o.g. Gleichung nicht-trivial lösbar ist, d.h. der zu $\vec{\Pi}$ gehörende Eigenwert tatsächlich existiert.

d) Wie groß sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\vec{\Pi}$.

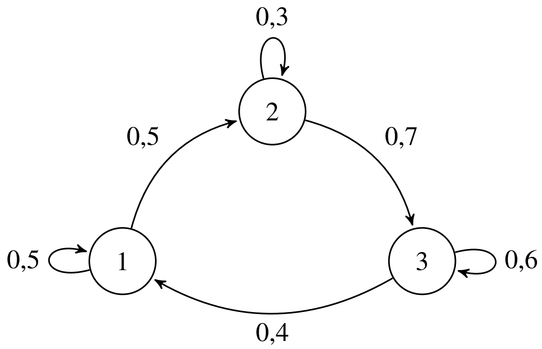

Abbildung 6: Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette

Aufgabe 36

Für die Übermittlung von Nachrichten werde folgendes Protokoll verwendet:
Am Anfang ist das System im **Ruhezustand (1)**. Sobald eine Nachricht gesendet wurde, wird in den **Wartezustand (2)** gewechselt. Trifft im nächsten Schritt eine Bestätigung der gesendeten Nachricht ein, ist der Vorgang abgeschlossen und es wird zurück in den Ruhezustand gewechselt. Trifft keine Bestätigung ein, wird in den nächsten **Zustand (3)** gewechselt. Von diesem aus wird entweder, nach erneuter Sendung, zurück in den Wartezustand, nach Erhalt einer Bestätigung, in den Ruhezustand oder, beim Ausbleiben einer Bestätigung, in den **Fehlerzustand (4)** gegangen. Im Fehlerzustand wird die Übertragung als gescheitert angesehen und eine zufällige Anzahl Schritte verblieben, bis in den Ruhezustand gewechselt wird und eine neue Übertragung beginnen kann.
Eine neue Übertragung beginnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2; eine Bestätigung wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 empfangen. Eine wiederholte Sendung einer Nachricht vom Zustand 3 aus erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1. Die Wahrscheinlichkeit im Fehlerzustand zu verbleiben beträgt 0,6.

a) Modellieren Sie das Protokoll als homogene Markoffkette, zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit innerhalb von maximal drei Zeitschritten wieder in den Ruhezustand zurückzukehren und damit sendebereit für die nächste Nachricht zu sein?

c) Es soll die mittlere Paketrate bestimmt werden: Wie viele Zeitschritte vergehen im Mittel, bis das System den Ruhezustand wieder erreicht, nachdem er zwischenzeitlich zum Senden einer Nachricht verlassen wurde.