Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 4

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 16

Dichtefunktionen

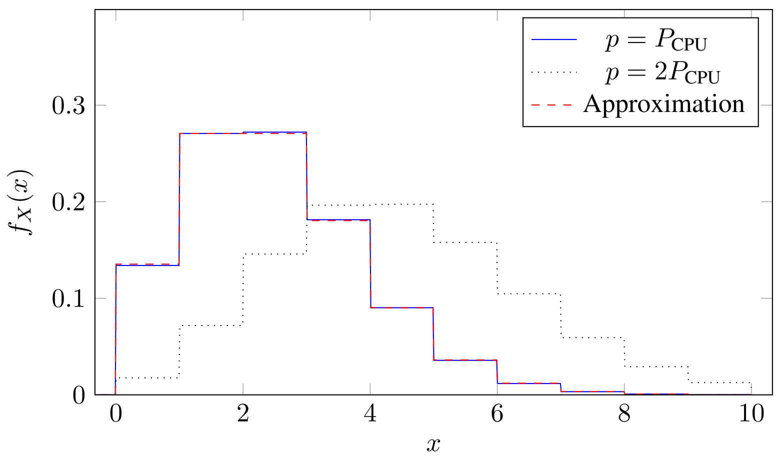

Abbildung 8: „Dichte“ der Anzahl defekter CPUs (ZV X)

Aufgabe 17

Lösung

b) Die gesuchte Wkeit ist

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 \wedge X_2 = 2 \wedge X_6 = 1) &= \frac{15!}{4!2!1!(15-4-2-1)!} \left(\frac{1}{7}\right)^4 \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left(\frac{1}{7}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right)^{15-4-2-1} \\ &= \underline{0{,}9327\%} \end{aligned}$$

c) Dichtefunktion

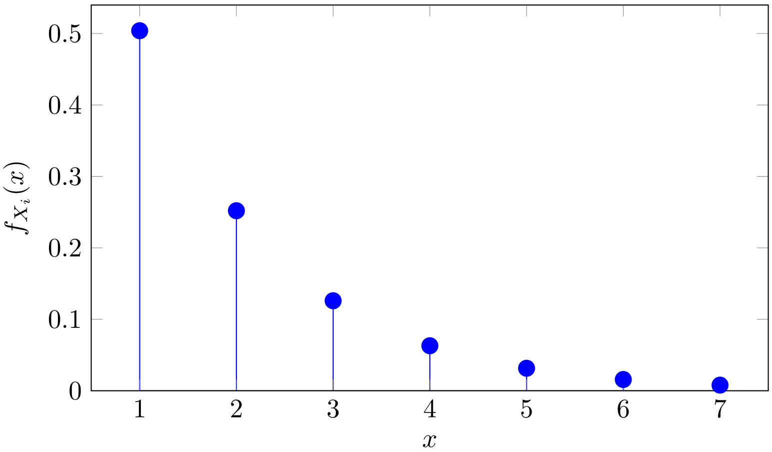

Abbildung 9: „Dichte“ der angezeigten Feldnummer

Aufgabe 18

a) Dichte und Integrationsgrenzen

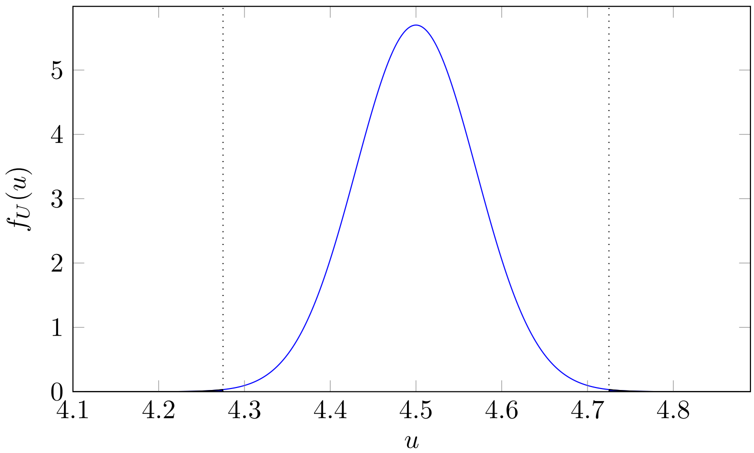

Abbildung 10: Dichte gemessenen Ladespannung bei $\mu = 4{,}5$ Volt

Tabelle der Standardnormalverteilung I

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,64	0,9958546	3,10	0,9990323	4,10	0,9999793
2,66	0,9960929	3,15	0,9991836	4,15	0,9999833
2,68	0,9963188	**3,20**	**0,9993128**	4,20	0,9999866
2,70	0,9965330	3,25	0,9994229	4,25	0,9999893
2,72	0,9967359	3,30	0,9995165	4,30	0,9999914
2,74	0,9969280	3,35	0,9995959	4,35	0,9999931
2,76	0,9971099	**3,40**	**0,9996630**	4,40	0,9999945
2,78	0,9972820	3,45	0,9997197	4,45	0,9999957
2,80	0,9974448	3,50	0,9997673	4,50	0,9999966
2,82	0,9975988	3,55	0,9998073	4,55	0,9999973
2,84	0,9977443	3,60	0,9998408	4,60	0,9999978
2,86	0,9978817	3,65	0,9998688	**4,65**	**0,9999983**
2,88	0,9980116	3,70	0,9998922	4,70	0,9999986

Abbildung 11: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

Tabelle der Standardnormalverteilung II

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,8849303	1,70	0,9554345	2,20	0,9860965
1,22	0,8887675	1,72	0,9572837	2,22	0,9867906
1,24	0,8925123	1,74	0,9590704	2,24	0,9874545
1,26	0,8961653	1,76	0,9607960	2,26	0,9880893
1,28	0,8997274	**1,78**	**0,9624620**	2,28	0,9886961
1,30	0,9031995	1,80	0,9640696	2,30	0,9892758
1,32	0,9065824	1,82	0,9656204	2,32	0,9898295
1,34	0,9098773	1,84	0,9671158	2,34	0,9903581
1,36	0,9130850	1,86	0,9685572	2,36	0,9908625
1,38	0,9162066	1,88	0,9699459	2,38	0,9913436
1,40	0,9192433	1,90	0,9712834	2,40	0,9918024
1,42	0,9221961	1,92	0,9725710	2,42	0,9922397
1,44	0,9250663	1,94	0,9738101	2,44	0,9926563

Abbildung 12: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

c) Dichte und Integrationsgrenzen

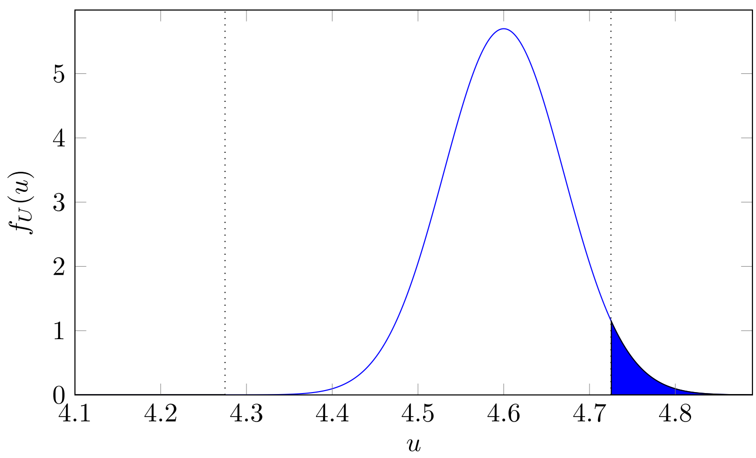

Abbildung 13: Dichte gemessenen Ladespannung bei $\mu = 4{,}6$ Volt

Aufgabe 19

Lösung

a) Für den Median $x_{1/2}$ einer stetigen ZV gilt $1/2 = F_X(x_{1/2})$. Für die exponentialverteilte ZV X ergibt sich mit $x_{1/2} = 3{,}82$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda x_{1/2}} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{x_{1/2}} = \underline{0{,}181}$$

b) Für das p-te Quantil einer stetigen ZV ist $p = F_X(x_p)$. Mit $p = 0{,}95$ gilt

$$p = 1 - e^{-\lambda x_p} \Longrightarrow x_p = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda} = \underline{16{,}51}$$

Verteilungsfunktion und Quantile

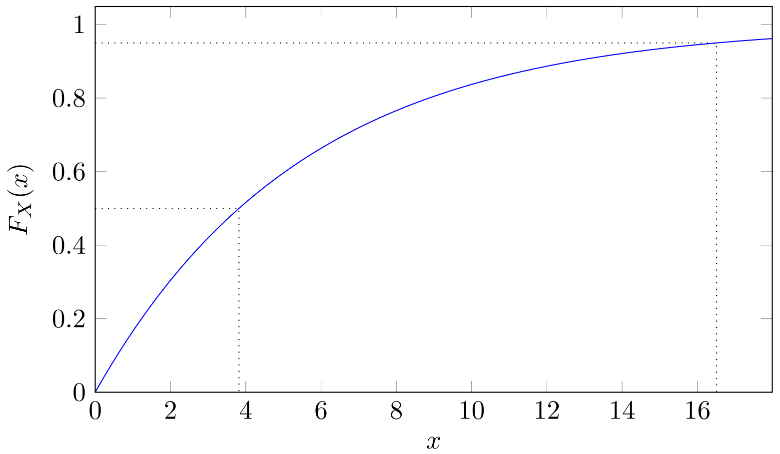

Abbildung 14: Verteilungsfunktion der ZV X

Aufgabe 20

a), c) Summendichte

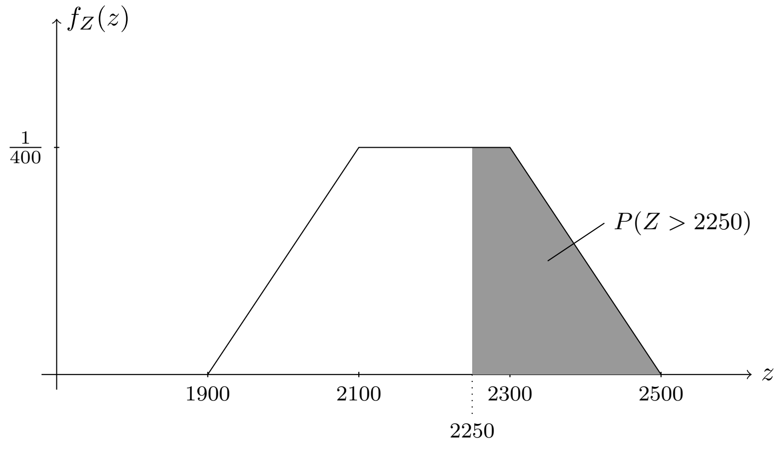

Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV Z

Lösung

d) Die Verteilungsfunktion wird durch abschnittsweise Integration der Dichte aus Aufgabenteil b) berechnet (dabei muss der Endwert des vorherigen Abschnitts immer zum nächsten hinzuaddiert werden).

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } z < 1900 \\ 0 + \frac{1}{200}\frac{1}{400}\frac{1}{2}(z-1900)^2, & \text{für } 1900 < z \leq 2100 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{400}(z-2100)\ , & \text{für } 2100 < z \leq 2300 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200}\frac{1}{400}\frac{1}{2}(z-2500)^2, & \text{für } 2300 < z \leq 2500 \\ 1, & \text{für } 2500 \leq z \end{cases}.$$

Zusammenfassung

- **Binomialverteilung**: N unabhängige, identische Zufallsexperimente mit je zwei verschiedenen Ergebnissen (**Bernoullisches Versuchsschema**).

$$P(X_N = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \qquad (6.2\text{-}1)$$

- Für N groß und p klein approx. die **Poissonverteilung** die Binomialvert. ($\lambda = Np > 0$):

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (\text{Def. } 6.4\text{-}1)$$

- **Polynomialverteilung**: N unabhängige, identische Zufallsexperimente mit je mehr als zwei verschiedenen Ergebnissen.

$$P(X_1 = k_1 \wedge X_2 = k_2 \wedge ...) = \frac{N!}{k_1!k_2!...} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \qquad (6.3\text{-}1)$$

  Es ist $k_1 + k_2 + ... = N$ und $p_1 + p_2 + ... = 1$.

- **Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\text{Def. } 6.8\text{-}1)$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (\text{Kap. } 6.8)$$

  Für die Verwendung der Tabelle aus dem Buch: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

- **Exponentialverteilung** $\mathsf{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} \qquad (\text{Def. } 6.7\text{-}1)$$

- **Gleichverteilung** $\mathcal{U}(a; b)$ mit $b > a$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x < b \\ 0 & , sonst \end{cases} \qquad (\text{Def. } 6.6\text{-}1)$$

- **Gemeinsame Dichte** unabhängiger Zufallsvariablen X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdots f_Y(y) \qquad (\text{Def. } 7.3\text{-}1)$$

- **Summe** unabhängiger Zufallsvariablen $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, \mathrm{d}x \qquad (\text{Def. } 7.4\text{-}5)$$