Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 1

(Wintersemester 2013/14)

Zusammenfassung

- Ergebnisraum $\Omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots, \xi_N\}$ (Menge aller Ereignisse ξ_n)
  Ereignis $A \subset \Omega$ (Teilmenge von Ω), sicheres Ereignis Ω, unmögliches $\emptyset$
  Elementarereignis $A = \{\xi_n\} \subset \Omega$ (einelementige Teilmenge Ω) (Def. 2.1-1)

- **Laplacesches Zufallsexperiment:**
  Alle Elementarereignisse $\{\xi_n\}$ eines endlichen Ergebnisraums Ω treten **gleich häufig** auf. (Def. 2.2-2)

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse } \{\xi_n\} \subset \Omega}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{(Def. 2.2-3)}$$

- Kombinatorik:

Auswahl von K aus N Elementen	Permutationen (Beachtung der Reihenfolge)	Kombinationen (keine Beachtung der Reihenfolge)	Variationen (Beachtung der Reihenfolge)
ohne Wiederholung	$N!$	$\binom{N}{K}$	$K!\binom{N}{K}$
mit Wiederholung	$\frac{N!}{K!}$	$\binom{N+K-1}{K}$	N^K

(Bild A-1)

- **Wahrscheinlichkeiten und Mengenoperationen:**

  Negation: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
  Vereingigung: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Durchschnitt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
  falls A und B **unabhängig** sind. (Satz 2.3-1)

- de MORGANsche Formeln:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \text{(Kap. 2.1)}$$

- Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad \text{(Kap. 2.1)}$$

- **Hypergeometrische Verteilung:** von n aus N ausgewählten sind k aus M günstig.

$$P_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k \leq n \leq N; k \leq M \leq N \qquad \text{(Kap. 2.2)}$$

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 2

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 6: Definitionen

σ-Algebra $\mathcal{B}$ (Definition 2.3-1)

$$(i) \quad A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}, \tag{2.3-1}$$

$$(ii) \quad A_n \in \mathcal{B}; n = 1{,}2{,}\ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}. \tag{2.3-2}$$

Kolmogoroffsche Axiome

$$\text{Axiom 1:} \quad \forall A \in \mathcal{B} : P(A) \geq 0 \tag{2.3-4}$$

$$\text{Axiom 2:} \quad P(\Omega) = 1 \tag{2.3-5}$$

$$\text{Axiom 3:} \quad \text{Ereignisdisjunktion } A_n \in \mathcal{B}; n = 1{,}2{,}\ldots$$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{2.3-6}$$

Aufgabe 9 b) Dichtefunktion

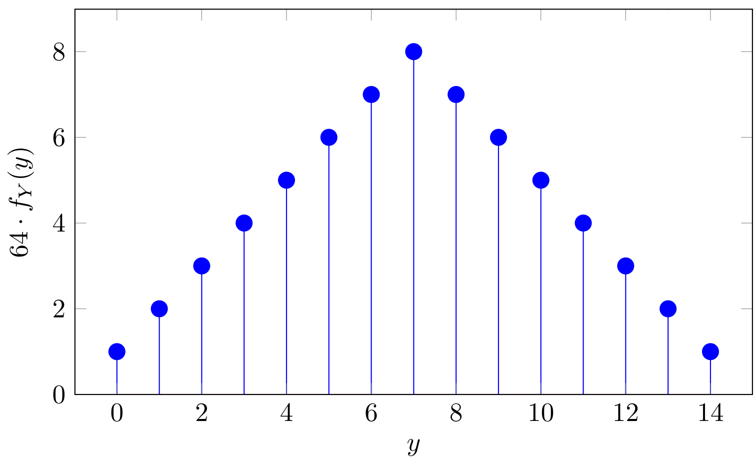

Abbildung 1: Dichtefunktion der ZV Y

Zusammenfassung

- **Bedingte Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{mit } P(B) > 0 \qquad \text{(Def. 3.1-1)}$$

- **Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
$\{A_n\}$ sei eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω und $(A_n) > 0 \; \forall n$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(B|A_n)P(A_n) \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Formel von Bayes**:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{mit } P(A) > 0, P(B) > 0 \qquad \text{(Satz 3.1-1)}$$

- **Unabhängigkeit** von Ereignissen:

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{(Def. 3.2-1)}$$

- **Zufallsvariable X:**
Eine Funktion $X = X(\xi) : \omega \to \mathbb{R}$, die jedem Ergebnis aus Ω eine reelle Zahl zuordnet, so dass $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}, \forall a \in \mathbb{R}$ gilt. (Def. 4.1-1)

- **Verteilungsfunktion** einer ZV X:

$$F_X(x) := P(X \leq x) \qquad \text{(Def. 4.1-2)}$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$

- Eigenschaften einer **Dichte**:

$$\text{(i)} \quad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$
$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \qquad \text{(Kap. 4.1)}$$

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 3
(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 10

a) Dichtefunktion

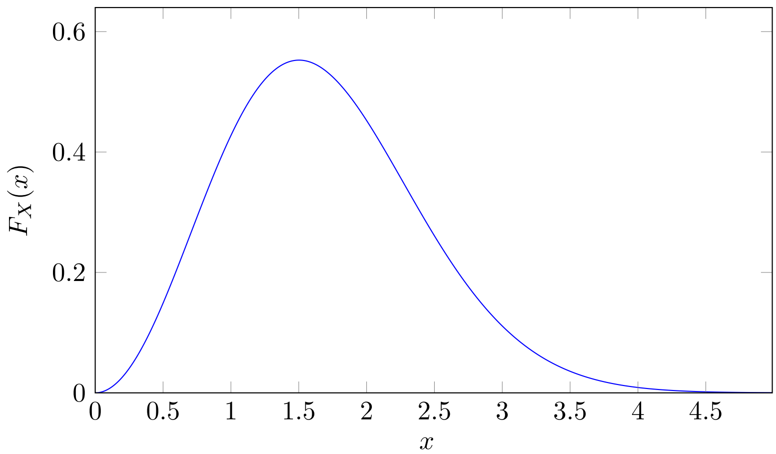

Abbildung 5: Dichtefunktion der ZV X

b) Dichtefunktion

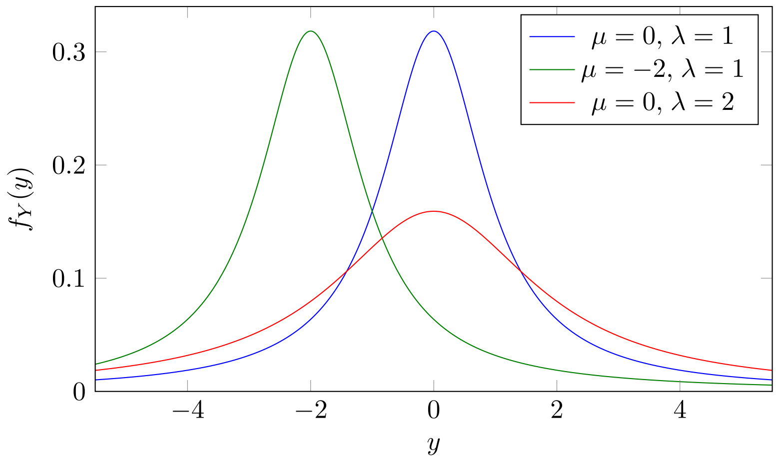

Abbildung 6: Dichtefunktion der ZV Y

b) Verteilungsfunktion

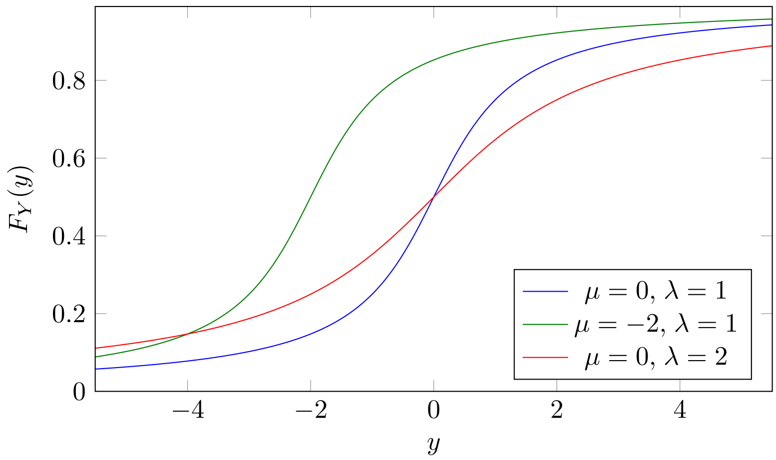

Abbildung 7: Verteilungsfunktion der ZV X

Aufgabe 11

a) Dichtefunktion

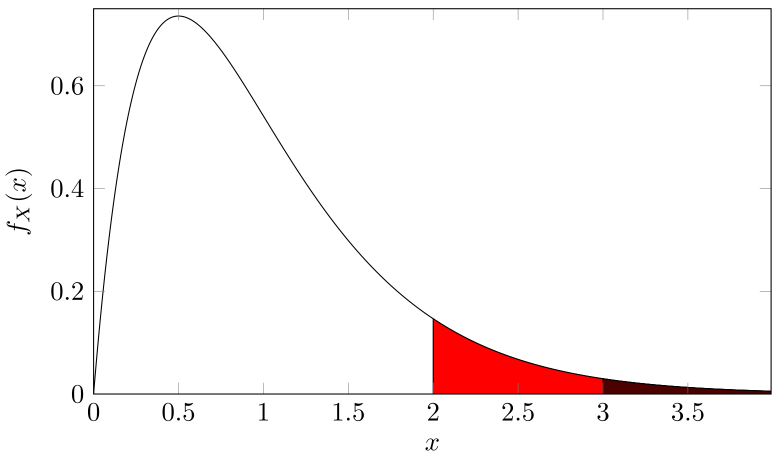

Abbildung 8: Dichtefunktion der ZV X

Aufgabe 13

a) Dichtefunktion

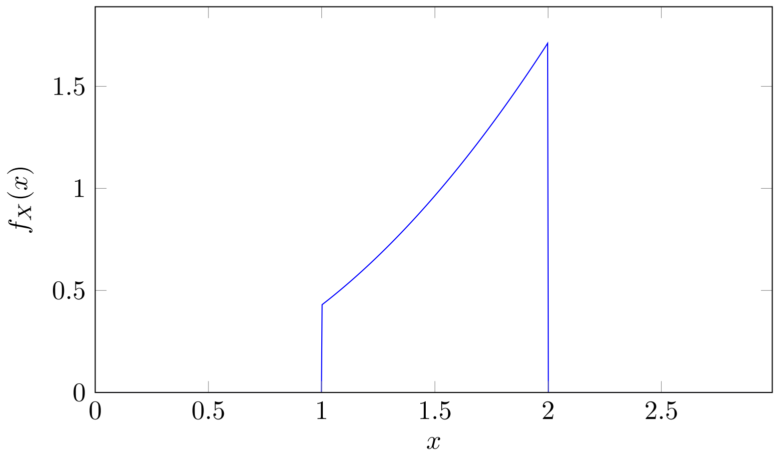

Abbildung 9: Dichtefunktion der ZV X

Aufgabe 14

a) Dichtefunktion

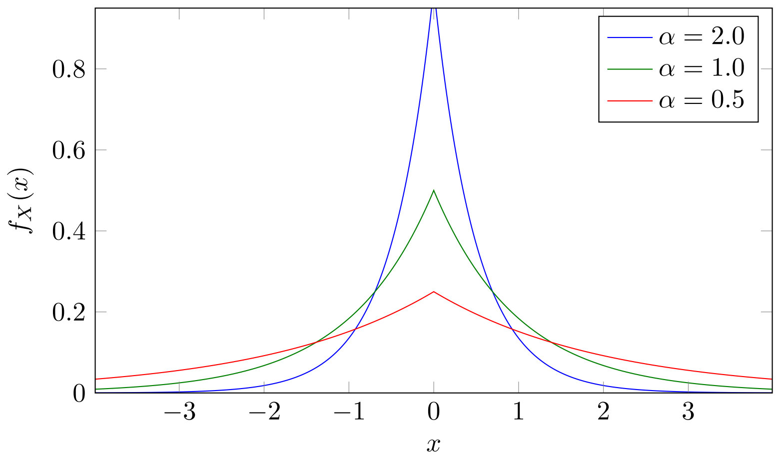

Abbildung 10: Dichtefunktion der ZV X

Zusammenfassung

- **Verteilungsfunktion** einer ZV X:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(Def. 4.1-2,4)}$$

- Eigenschaften einer **Dichte**:

$$\text{(i)} \qquad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(Def. 4.1-4)}$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{(Kap. 4.1)}$$

- **Erwartungswert:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \overset{X \text{ diskret}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \qquad \text{(5.1-1,2)}$$

- **Varianz:**

$$\operatorname{var}(X) = D^2(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E^2(X) \qquad \text{(5.1-5)}$$

- **Funktionen von ZV:** $Y = g\,(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|} \text{ mit } x_1, \ldots, x_N\text{: reelle Wurzeln von } y = g(x) \qquad \text{(4.2-9)}$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(5.1-7)}$$

- **Charaktertische Funktion:**

$$\varphi(s) := E(e^{jsX}) \quad \overset{X \text{ diskret}}{=} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{jsx_n} \cdot p_n \qquad \text{(Def. 5.2-1)}$$

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 4

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 16

Dichtefunktionen

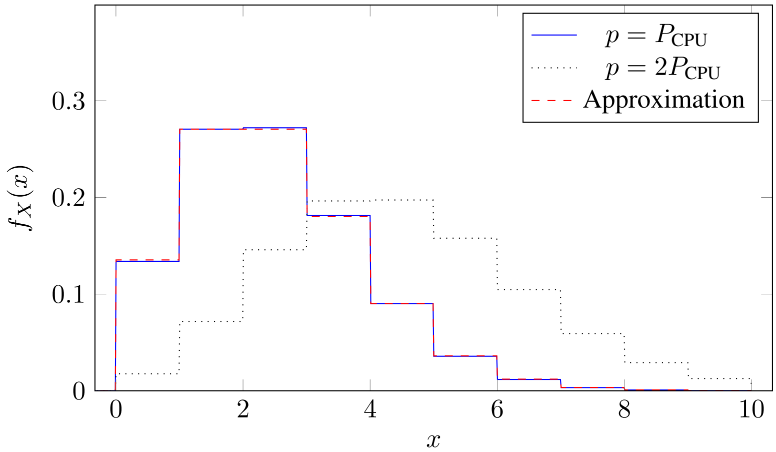

Abbildung 8: „Dichte“ der Anzahl defekter CPUs (ZV X)

Aufgabe 17

Lösung

b) Die gesuchte Wkeit ist

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 4 \wedge X_2 = 2 \wedge X_6 = 1) &= \frac{15!}{4!2!1!(15-4-2-1)!}\left(\frac{1}{7}\right)^4\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{1}{7}\right)^1\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)^{15-4-2-1} \\
&= \underline{0{,}9327\%}
\end{aligned}
$$

c) Dichtefunktion

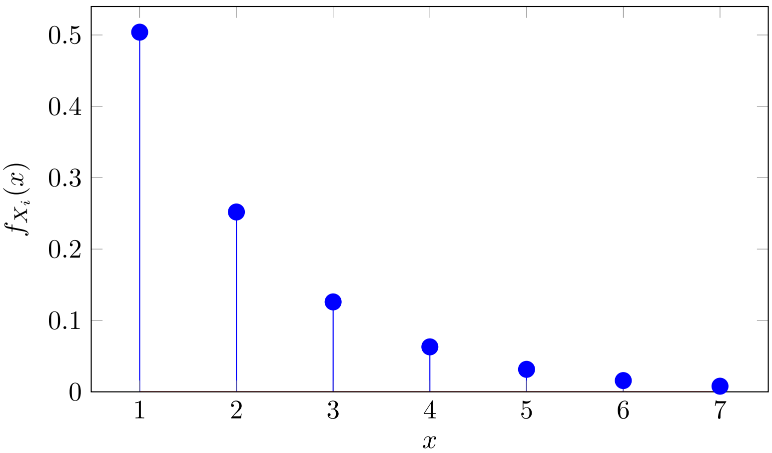

Abbildung 9: „Dichte“ der angezeigten Feldnummer

Aufgabe 18

a) Dichte und Integrationsgrenzen

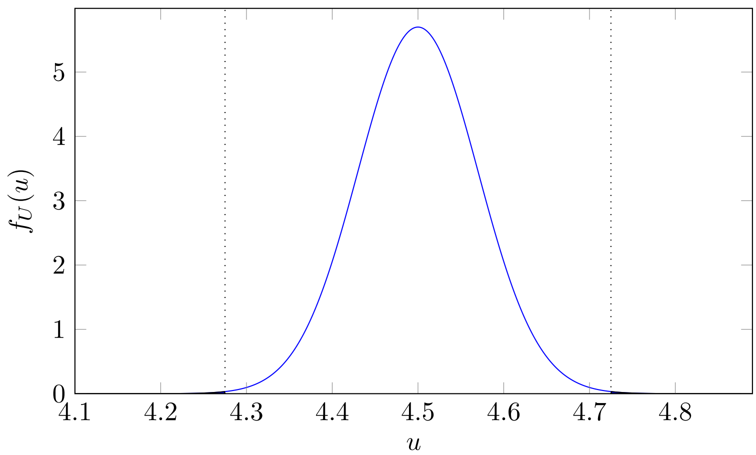

Abbildung 10: Dichte gemessenen Ladespannung bei $\mu = 4{,}5$ Volt

Tabelle der Standardnormalverteilung I

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,64	0,9958546	3,10	0,9990323	4,10	0,9999793
2,66	0,9960929	3,15	0,9991836	4,15	0,9999833
2,68	0,9963188	**3,20**	**0,9993128**	4,20	0,9999866
2,70	0,9965330	3,25	0,9994229	4,25	0,9999893
2,72	0,9967359	3,30	0,9995165	4,30	0,9999914
2,74	0,9969280	3,35	0,9995959	4,35	0,9999931
2,76	0,9971099	**3,40**	**0,9996630**	4,40	0,9999945
2,78	0,9972820	3,45	0,9997197	4,45	0,9999957
2,80	0,9974448	3,50	0,9997673	4,50	0,9999966
2,82	0,9975988	3,55	0,9998073	4,55	0,9999973
2,84	0,9977443	3,60	0,9998408	4,60	0,9999978
2,86	0,9978817	3,65	0,9998688	**4,65**	**0,9999983**
2,88	0,9980116	3,70	0,9998922	4,70	0,9999986

Abbildung 11: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

Tabelle der Standardnormalverteilung II

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,20	0,8849303	1,70	0,9554345	2,20	0,9860965
1,22	0,8887675	1,72	0,9572837	2,22	0,9867906
1,24	0,8925123	1,74	0,9590704	2,24	0,9874545
1,26	0,8961653	1,76	0,9607960	2,26	0,9880893
1,28	0,8997274	**1,78**	**0,9624620**	2,28	0,9886961
1,30	0,9031995	1,80	0,9640696	2,30	0,9892758
1,32	0,9065824	1,82	0,9656204	2,32	0,9898295
1,34	0,9098773	1,84	0,9671158	2,34	0,9903581
1,36	0,9130850	1,86	0,9685572	2,36	0,9908625
1,38	0,9162066	1,88	0,9699459	2,38	0,9913436
1,40	0,9192433	1,90	0,9712834	2,40	0,9918024
1,42	0,9221961	1,92	0,9725710	2,42	0,9922397
1,44	0,9250663	1,94	0,9738101	2,44	0,9926563

Abbildung 12: Standardnormalverteilung (hinter der 7. Nachkommastelle gerundet)

c) Dichte und Integrationsgrenzen

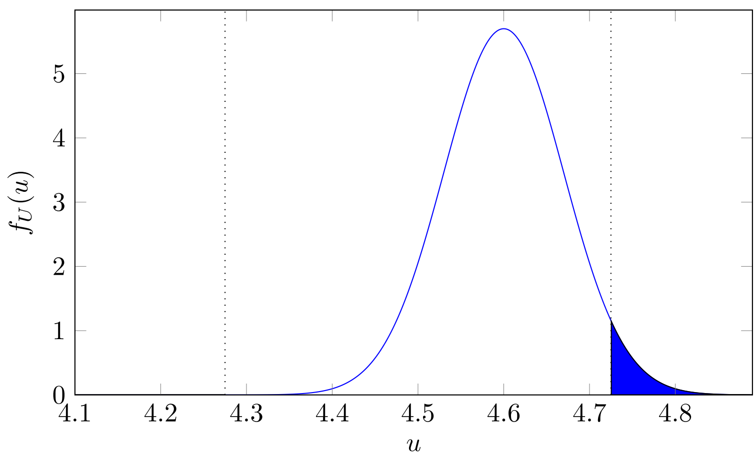

Abbildung 13: Dichte gemessenen Ladespannung bei $\mu = 4{,}6$ Volt

Aufgabe 19

Lösung

a) Für den Median $x_{1/2}$ einer stetigen ZV gilt $1/2 = F_X(x_{1/2})$. Für die exponentialverteilte ZV X ergibt sich mit $x_{1/2} = 3{,}82$

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda x_{1/2}} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{x_{1/2}} = \underline{0{,}181}$$

b) Für das p-te Quantil einer stetigen ZV ist $p = F_X(x_p)$. Mit $p = 0{,}95$ gilt

$$p = 1 - e^{-\lambda x_p} \Longrightarrow x_p = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda} = \underline{16{,}51}$$

Verteilungsfunktion und Quantile

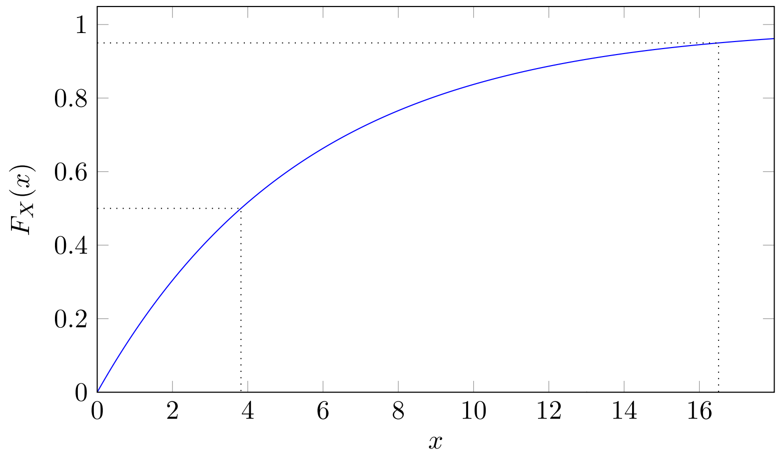

Abbildung 14: Verteilungsfunktion der ZV X

Aufgabe 20

a), c) Summendichte

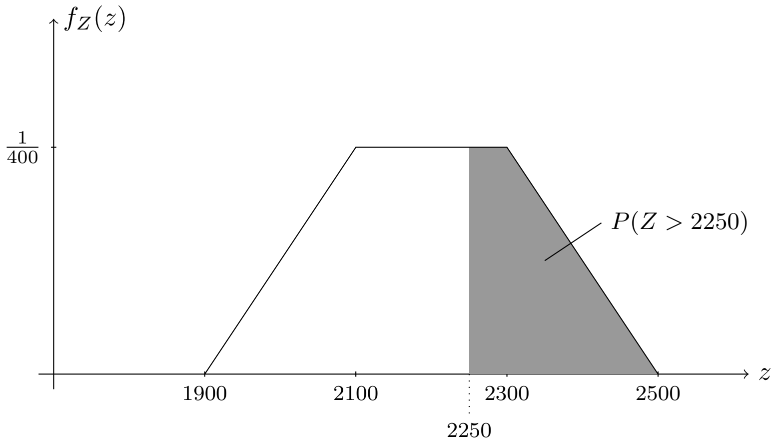

Abbildung 15: Dichtefunktion der ZV Z

Lösung

d) Die Verteilungsfunktion wird durch abschnittsweise Integration der Dichte aus Aufgabenteil b) berechnet (dabei muss der Endwert des vorherigen Abschnitts immer zum nächsten hinzuaddiert werden).

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad z < 1900 \\ 0 + \frac{1}{200}\frac{1}{400}\frac{1}{2}(z-1900)^2, & \text{für } 1900 < z \le 2100 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{400}(z-2100)\ , & \text{für } 2100 < z \le 2300 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200}\frac{1}{400}\frac{1}{2}(z-2500)^2, & \text{für } 2300 < z \le 2500 \\ 1, & \text{für } 2500 \le z \end{cases}.$$

Zusammenfassung

- **Binomialverteilung**: N unabhängige, identische Zufallsexperimente mit je zwei verschiedenen Ergebnissen (**Bernoullisches Versuchsschema**).

$$P(X_N = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{N-k} \tag{6.2-1}$$

- Für N groß und p klein approx. die **Poissonverteilung** die Binomialvert. ($\lambda = Np > 0$):

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{(Def. 6.4-1)}$$

- **Polynomialverteilung**: N unabhängige, identische Zufallsexperimente mit je mehr als zwei verschiedenen Ergebnissen.

$$P(X_1 = k_1 \wedge X_2 = k_2 \wedge ...) = \frac{N!}{k_1!k_2!...} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \tag{6.3-1}$$

  Es ist $k_1 + k_2 + ... = N$ und $p_1 + p_2 + ... = 1$.

- **Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \text{(Def. 6.8-1)}$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \text{(Kap. 6.8)}$$

  Für die Verwendung der Tabelle aus dem Buch: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

- **Exponentialverteilung** $\mathsf{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} \qquad \text{(Def. 6.7-1)}$$

- **Gleichverteilung** $\mathcal{U}(a; b)$ mit $b > a$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \le x < b \\ 0 & , sonst \end{cases} \qquad \text{(Def. 6.6-1)}$$

- **Gemeinsame Dichte** unabhängiger Zufallsvariablen X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdots f_Y(y) \qquad \text{(Def. 7.3-1)}$$

- **Summe** unabhängiger Zufallsvariablen $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{(Def. 7.4-5)}$$

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 5

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 21

Randdichte und Verteilungsfunktionen

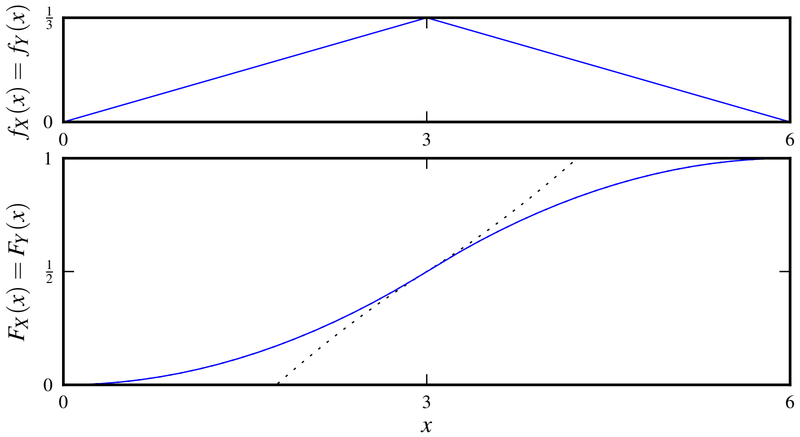

Abbildung 16: Randdichte und Verteilungsfunktionen von X

Aufgabe 22

Dichtefunktionen

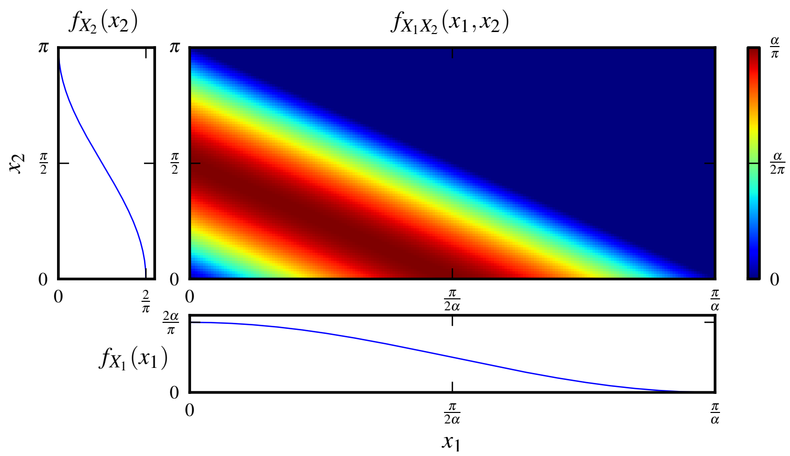

Abbildung 17: 2D-Dichte und Randdichten von X_1, X_2

Zusammenfassung

- **Verteilungsfunktion**:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \tag{Def. 7.1-2}$$

- **Randdichte**:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) \, \mathrm{d}y \tag{Def. 7.2-1}$$

- **Bedingte Dichte**:

$$f_X(x|Y = y_1) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y_1)}, \text{ wenn } f_Y(y_1) > 0 \tag{Def. 7.2-2}$$

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \tag{Def. 7.3-1}$$

- **Kovarianz** und **Korrelationskoeffizient** der Zufallsvariablen X und Y:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E\left((X - E(X))\,(Y - E(Y))\right) \\ \varrho_{XY} &= \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} \end{aligned} \tag{Def. 7.3-2}$$

  Eigenschaften:

  unkorreliert $\Leftrightarrow$ $\varrho_{XY} = 0$ $\Leftarrow$ **unabhängig**

  Sind X, Y und $(X,Y)^T$ normalverteilt, folgt aus $\varrho_{XY} = 0$ auch die Unabhängigkeit von X und Y.

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 6

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 24

WT-Buch, Kapitel 7.4

Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen

(1)
$$U_1 = g_1(X,Y); \qquad U_2 = g_2(X,Y) \tag{7.4-1}$$

(2)
$$x = h_1(u_1,u_2); \qquad y = h_2(u_1,u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3)
$$f_{U_1U_2}(u_1,u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1,u_2); h_2(u_1,u_2)\Big) \cdot |J| \tag{7.4-2}$$

a) Dichtefunktionen I

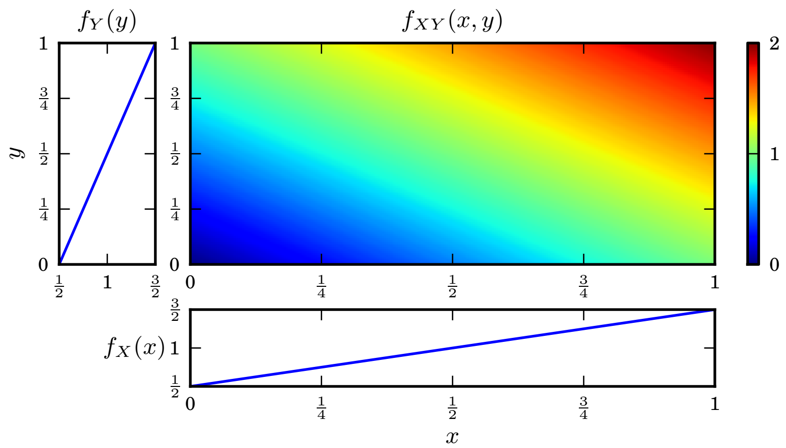

Abbildung 18: Randdichten und Verteilungsfunktionen von (X,Y)

a) Dichtefunktionen II

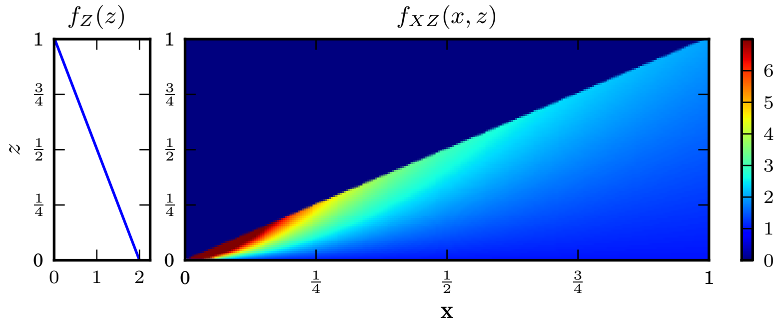

Abbildung 19: Randdichte und Verteilungsfunktionen von (X, Z)

Aufgabe 25

a) Dichte des Empfangssignals I

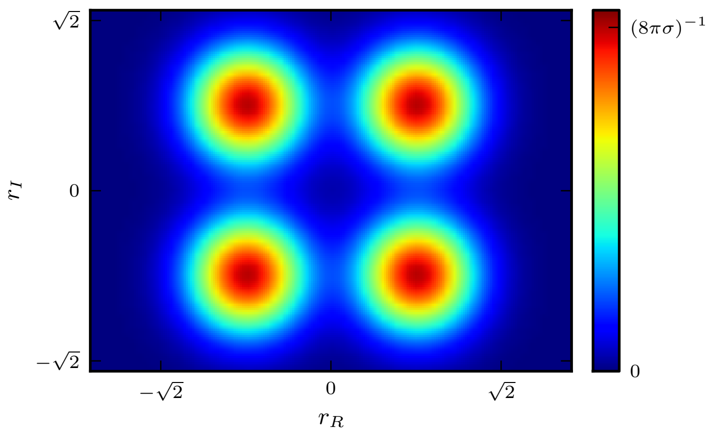

Abbildung 20: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{R}$ für $3\sigma = \sqrt{2}$

a) Dichte des Empfangssignals II

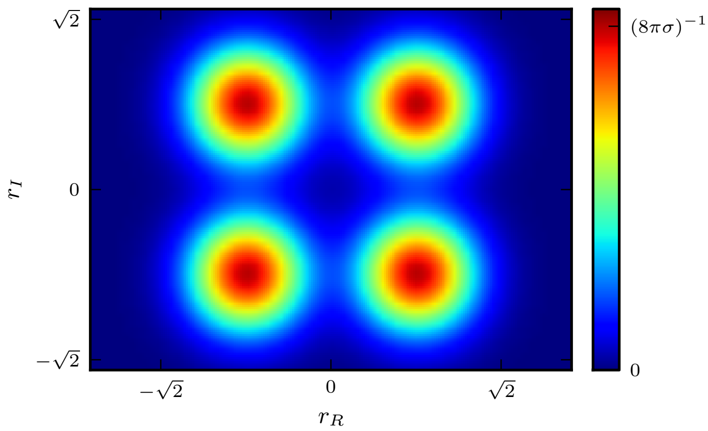

Abbildung 21: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{R}$ für $2\sigma = \sqrt{2}$

Aufgabe 26

WT-Buch, Kapitel 7.8

Satz 7.8-4 (Zentraler Grenzwertsatz)
$X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{S_N - Nm}{\sqrt{N}d} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \tag{7.8-10}$$

Satz 7.8-5 (Satz von de Moivre-Laplace)
Ist S_N eine binomialverteilte ZV mit den Parametern N und p, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \le x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \tag{7.8-11}$$

Bemerkung: Für praktische Zwecke ($N < \infty$) reicht $D^2(S_N) \ge 9$.

Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 7

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 28

c) Stationarität

Definition 8.1-2
Falls

$$f(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_N+h}) = f(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_N}) \tag{8.1-2}$$

für jedes h und jedes N gilt, ist $X(t)$ ein **stark stationärer Prozess**.

Definition 8.2-3
Ein stochastischer Prozesses, dessen Erwartungswert (1. Moment) konstant ist und für dessen Autokorrelationsfunktion

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = \varphi_{XX}(t_2 - t_1) = \varphi_{XX}(\tau) \tag{8.2-3}$$

gilt, heißt **(schwach) stationär**.

Zusammenfassung

- **Autokorrelationsfunktion** eines stochastischen Prozesses $X(t)$:

$$\varphi_{XX}(t_1, t_2) = E\Big(X(t_1)X^*(t_2)\Big) \tag{8.3-2}$$

- (schwache) **Stationarität**:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \text{const}(t) \\ \varphi_{XX}(t_1, t_2) &= \varphi_{XX}(t_2 - t_1) = \varphi_{XX}(\tau) = \varphi_{XX}(t, t+\tau) \end{aligned} \tag{Def. 8.3-2}$$

- $X(t), Y(t)$ **gemeinsam stationär**: $X(t)$ stationär, $Y(t)$ stationär und

$$\varphi_{XY}(t_1, t_2) = \varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(-\tau) \tag{Kap. 8.2}$$

- **Leistungsdichtespektrum** eines stationären Prozesses:

$$\Phi_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau}\, \mathrm{d}\tau \tag{Def. 8.5-1}$$

- **mittlere Leistung** $P_X = \varphi_{XX}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(f)\, \mathrm{d}f.$ (Kap. 8.2)

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 8

(Wintersemester 2013/14)

Aufgabe 33

Poissonprozess

Satz 9.2-1
Mit $X(0) = 0$ gibt $X(t)$ die Anzahl der im Intervall der Dauer t eingetroffenen Pakete an. Es gilt für $t \geq 0$

$$P\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{9.2-1}$$

d.h. $X(t)$ folgt einer Poissonverteilung.

Satz 9.2-2
Für einen Poissonschen Ankunftsprozess $X(t)$ besitzt die Zufallsvariable T eine Exponentialverteilung, d. h. die Dichte von T ist

$$f_T(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda\tau} & \text{für } \tau > 0 \end{cases}, \ \lambda > 0. \tag{9-2.4}$$

Aufgabe 36

Homogene Markoffketten

Mittlere Dauer einer Irrfahrt
Die mittlere Dauer m_i der Irrfahrt von einem Zustand $i \notin R$ aus bis zur Absorption im Rand ist um 1 größer als das gewichtete Mittel der mittleren Irrfahrtsdauern von allen Zuständen aus ($m_i = 0$ für $i \in R$):

$$m_i = 1 + \sum_{k=1}^{N} p_{ik} m_k \tag{9.3-7}$$