Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 3

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 10

Mittels eines Sensors soll die zufällige Größe X gemessen werden. Die Dichte von X ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zur Messung stehen zwei verschiedene Modelle zur Verfügung: Sensor I setzt alle Werte $x \leq 2$ fehlerfrei auf den Ausgang um. Für alle anderen Werte wird der Sensor übersteuert und es wird nur der Maximalwert 2 ausgegeben. Das alternative Modell, Sensor II, hat identische Funktionalität, allerdings können Werte bis $x = 3$ fehlerfrei ausgegeben werden.

a) Die Wahrscheinlichkeit einer Übersteuerung p_c soll maximal 2% sein. Reicht der Arbeitsbereich von Sensor I aus oder muss der hochwertigere Sensor II verwendet werden?

b) Man gebe die Dichte $f_Y(y)$ der vom verwendeten Sensor ausgegebenen Messwerte Y an.

c) Um wie viel Prozent verschiebt sich der Erwartungswert der ausgegebenen Werte Y im Vergleich zu $E(X)$?

Aufgabe 11

Man zeige für eine stetige Zufallsvariable X, für die die ersten beiden Momente existieren, und $Y = aX + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ folgende Beziehungen:

a) $E(Y) = aE(X) + b$

b) $D^2(Y) = a^2 D^2(X)$

c) $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Aufgabe 12

Gegeben sei die Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2 & \text{, für } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

a) Man berechne die Verteilungsfunktion und Dichte von $Y = e^{-X}$.

b) Man berechne den Erwartungswert von Y.

Aufgabe 13

Ein Teilchen verlässt den Ursprung unter dem Einfluss der Gravitationskraft mit einer initialen Geschwindigkeit v und einem zufälligen Winkel $\Phi \in (0; \frac{\pi}{2}]$ gegenüber der horizontalen Achse. Das Teilchen hat eine parabelförmige Trajektorie (ohne Reibung) und erreicht den Grund in einer Entfernung von

$$D = \frac{v^2}{g} \sin(2\Phi)$$

vom Ursprung. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsvariablen D unter der Annahme, dass

a) Φ in seinem Wertebereich, $(0; \frac{\pi}{2}]$, gleichverteilt ist.

b) $f_\Phi(\varphi) = \sin(2\varphi)$ ist.

Aufgabe 14

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der folgenden Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x|}$$

a) Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von X.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von $\varphi(s)$ die Varianz $D^2(X)$.