Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. i.R. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 7

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 27

Es sei $X(t)$, $t > 0$ ein stochastischer Prozess mit der Verteilungsfunktion

$$F_{X(t)}(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{t}\right)^2\right\}, \quad x \geq 0.$$

Die gemeinsame Dichte von $X(t_1)$ und $X(t_2)$, $(t_1, t_2 > 0)$ sei

$$f(x_{t_1}, x_{t_2}) = 4\,\frac{x_{t_1}\,x_{t_2}}{t_1^2\,t_2^2}\,\exp\left\{-\left[\left(\frac{x_{t_1}}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{x_{t_2}}{t_2}\right)^2\right]\right\}, \qquad x_{t_1}, x_{t_2} \geq 0$$

a) Ist der $X(t)$ (stark) stationär?

b) Man berechne $E\{X(t)\}$ dieses Prozesses.

c) Man berechne die Autokorrelationsfunktion von $X(t)$.

Aufgabe 28

Gegeben seien die beiden stochastischen Prozesse

$$X(\xi, t) = A(\xi) \cdot \left[1 + \cos(2\pi f_0 t + \Psi(\xi))\right] \text{ und}$$
$$Y(\xi, t) = A(\xi) \cdot \left[1 + \sin(2\pi f_0 t + \Psi_Y(\xi))\right],$$

wobei $f_0 \in \mathbb{R}$ konstant ist. Die Zufallsvariablen A und Ψ bzw. Ψ_Y seien stochastisch unabhängig. Ψ, Ψ_Y seien im Intervall $[-\pi, \pi)$ gleichverteilt, A sei normalverteilt mit dem Erwartungswert Null und der Varianz σ^2.

a) Man bestimme die Autokorrelationsfunktion und die spektrale Leistungsdichte des Prozesses $X(t)$.

b) Wie verändern sich die berechneten Funktionen für den Fall, dass A ein stochastischer Prozess $A(\xi, t)$ ist, weiterhin unabhängig von Y und $\varphi_{AA}(\tau) = \mathrm{si}(\pi B \tau)$ mit $B > 0$ gilt?

c) Man bestimme das Kreuz-Leistungsdichtespektrum $\Phi_{XY}(f)$ unter der Bedingung $A = 1$ für den Fall, dass

   (i) $\Psi(\xi)$ und $\Psi_Y(\xi)$ unabhängig sind.

   (ii) $\Psi(\xi) = \Psi_Y(\xi)$ gilt.

Aufgabe 29

Am Eingang eines LTI-Systems mit der Impulsantwort $h(t) = \exp\left\{-\frac{t}{T}\right\}$ für $t \geq 0$; $T > 0$ wird ein komplexwertiger weißer Gaußscher Rauschprozess $X(t)$ angelegt.

a) Man bestimme das Leistungsdichtespektrum und die mittlere Leistung des Ausgangsprozesses $Y(t)$.

c) Man bestimme die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $Y(t_1)$ und $Y(t_2)$ mit $t_1 = 0$ und $t_2 = 2T$.

Aufgabe 30

$X(n)$ sei ein mittelwertfreier, zeitdiskreter, stationärer Zufallsprozess mit der mittleren Leistung σ_x^2 dessen Werte für Zeiten $n_1 \neq n_2$ unkorreliert sind.

a) Geben Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{XX}(m)$ an.

b) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{YY}(m)$ von $Y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(n-k)$ für den Fall $N = 3$.

c) Zeichnen Sie φ_{XX} und φ_{YY} in das selbe Koordinatensystem.