Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. i.R. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

CEL

Wahrscheinlichkeitstheorie – Übungsblatt 8

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 31

Es sei bekannt, dass die Anzahl $X(t)$ der Störungen in einem Rechnernetz im Intervall $[0, t)$ einem Poissonprozess mit der mittleren Ankunftsrate $\lambda = 0{,}25$ [h^{-1}] folgt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt in den ersten 8 Stunden höchstens eine Störung auf?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rechnernetz (danach) 10 Stunden ohne Störung funktioniert?

c) Die Folge von Zufallsvariablen T_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem die n-te Störung stattfindet. Man berechne die Dichte von T_n.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt die dritte Störung nach 8 Stunden auf?

Aufgabe 32

Abbildung 6 zeigt den Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ an.

b) Im n-ten Zeitschritt gilt für die Zustandsverteilung $\vec{p}_n^{\,T} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich der Prozess zwei Schritte später nicht im zweiten Zustand?

Um die mittlere zu erwartende Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Zustand zu berechnen, wird der stochastische Vektor $\vec{\Pi}$ gesucht, für den $\vec{\Pi}^T = \vec{\Pi}^T \cdot \mathbf{P}$ gilt.

c) Man beschreibe diesen Zusammenhang als Eigenwertproblem und zeige, dass o.g. Gleichung nicht-trivial lösbar ist, d.h. der zu $\vec{\Pi}$ gehörende Eigenwert tatsächlich existiert.

d) Wie groß sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\vec{\Pi}$.

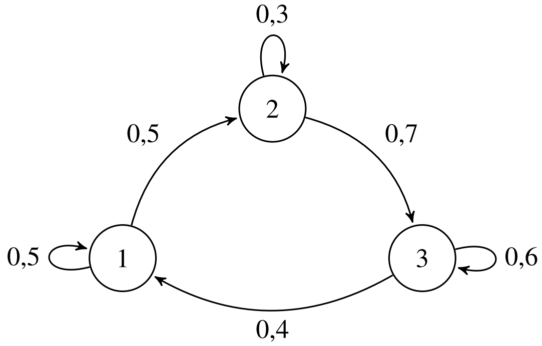

Abbildung 6: Übergangsgraph einer homogenen Markoffkette

Aufgabe 33

Für die Übermittlung von Nachrichten werde folgendes Protokoll verwendet:

Am Anfang ist das System im **Ruhezustand (1)**. Sobald eine Nachricht gesendet wurde, wird in den **Wartezustand (2)** gewechselt. Trifft im nächsten Schritt eine Bestätigung der gesendeten Nachricht ein, ist der Vorgang abgeschlossen und es wird zurück in den Ruhezustand gewechselt. Trifft keine Bestätigung ein, wird in den nächsten **Zustand (3)** gewechselt. Von diesem aus wird entweder, nach erneuter Sendung, zurück in den Wartezustand, nach Erhalt einer Bestätigung, in den Ruhezustand oder, beim Ausbleiben einer Bestätigung, in den **Fehlerzustand (4)** gegangen. Im Fehlerzustand wird die Übertragung als gescheitert angesehen und eine zufällige Anzahl Schritte verblieben, bis in den Ruhezustand gewechselt wird und eine neue Übertragung beginnen kann.

Eine neue Übertragung beginnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2; eine Bestätigung wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 empfangen. Eine wiederholte Sendung einer Nachricht vom Zustand 3 aus erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1. Die Wahrscheinlichkeit im Fehlerzustand zu verbleiben beträgt 0,6. 3>

a) Modellieren Sie das Protokoll als homogene Markoffkette, zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und geben Sie die Übergangsmatrix an.

b) Gerade wurde eine Nachricht gesendet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit innerhalb von maximal drei Zeitschritten wieder in den Ruhezustand zurückzukehren und damit sendebereit für die nächste Nachricht zu sein?

c) Es soll die mittlere Paketrate bestimmt werden: Wie viele Zeitschritte vergehen im Mittel, bis das System den Ruhezustand wieder erreicht, nachdem er zwischenzeitlich zum Senden einer Nachricht verlassen wurde.

Aufgabe 34

Gegeben sei der Prozess $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t)$, wobei $X(t)$ stationär sei.

a) Man zeige, dass der Prozess zyklostationär ist.

b) Berechnen Sie $\overline{\varphi}_{YY}(\tau)$.

c) Berechnen Sie $\overline{\Phi}_{YY}(f)$ für $\varphi_{XX}(\tau) = \delta(\tau)$.