Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. i.R. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 5

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 19

Dichtefunktionen

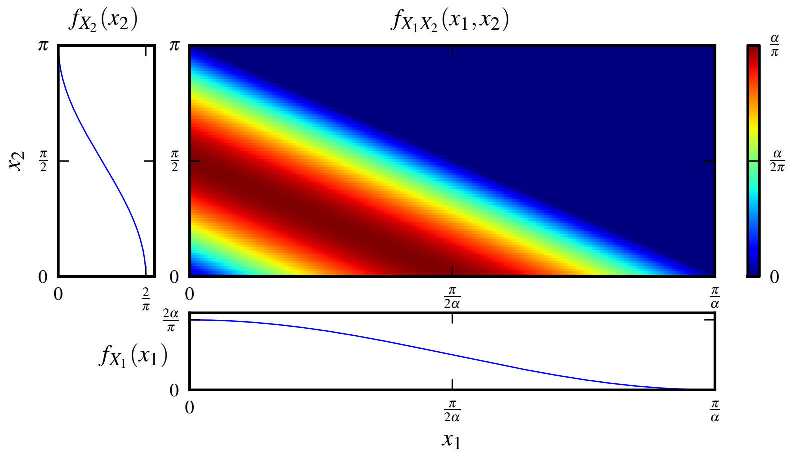

Abbildung 18: 2D-Dichte und Randdichten von X_1, X_2

Aufgabe 21

a) Dichtefunktionen I

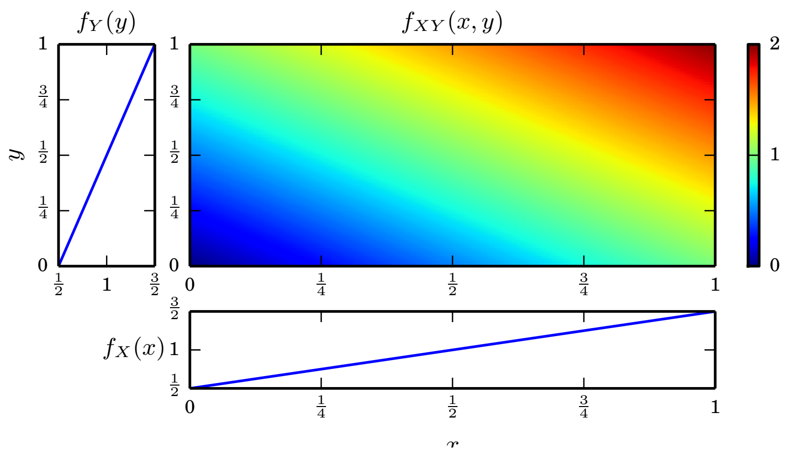

Abbildung 19: Randdichten und Verteilungsfunktionen von (X, Y)

a) Dichtefunktionen II

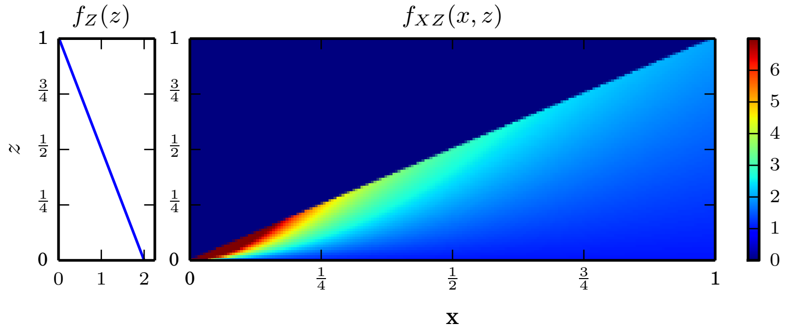

Abbildung 20: Randdichte und Verteilungsfunktionen von (X, Z)

Zusammenfassung

- **Gemeinsame Dichte unabhängiger Zufallsvariablen** X, Y:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \text{(Def. 7.3-1)}$$

- **Kovarianz** und **Korrelationskoeffizient** der Zufallsvariablen X und Y:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X,Y) &= E\left((X - E(X))\,(Y - E(Y))\right) \\ \varrho_{XY} &= \frac{\text{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)} \end{aligned} \qquad \text{(Def. 7.3-2)}$$

Eigenschaften:

unkorreliert $\quad\Leftrightarrow\quad \varrho_{XY} = 0 \quad\Leftarrow\quad$ **unabhängig**

Sind X, Y und $(X, Y)^T$ normalverteilt, folgt aus $\varrho_{XY} = 0$ auch die Unabhängigkeit von X und Y.

- **Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen**

(1) $$U_1 = g_1(X, Y); \qquad U_2 = g_2(X, Y) \qquad \text{(7.4-1)}$$

(2) $$x = h_1(u_1, u_2); \qquad y = h_2(u_1, u_2)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3) $$f_{U_1U_2}(u_1, u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1, u_2); h_2(u_1, u_2)\Big) \cdot |J| \qquad \text{(7.4-2)}$$

- **Die Normalverteilung – k-tes zentrales Moment**

$$E\left[(X - \mu)^k\right] = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots (k-1)\sigma^k & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{(6.8-6)}$$