Karlsruhe Institute of Technology
Communications Engineering Lab
Univ.-Prof. i.R. Dr. rer.nat. Friedrich Jondral

Wahrscheinlichkeitstheorie – Zusatzmaterial 6

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 23

c) Dichte des Empfangssignals I

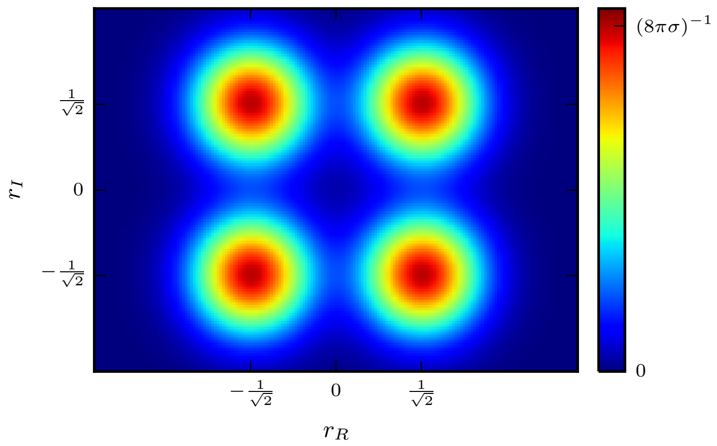

Abbildung 21: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{R}$ für $\sigma = 1/3$

c) Dichte des Empfangssignals II

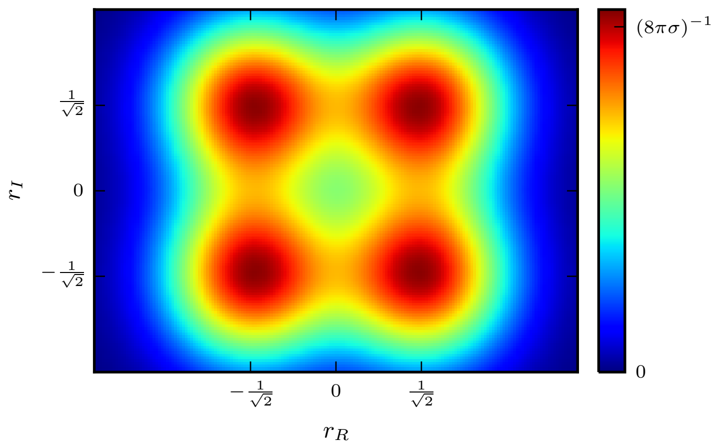

Abbildung 22: Dichte des Empfangssignals $\mathbf{R}$ für $\sigma = 1/2$

Aufgabe 25

b) Lösung

Gesucht ist d_x, so dass $P(S \leq d_x) = 0{,}98$. Wie in Aufgabenteil a) liegt gemäß dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise eine Normalverteilung vor (der Satz von Moivre-Laplace kann angewendet werden).

$$P(S \leq d_x) = \Phi\left(\frac{d_x - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right) = 0{,}98 \quad \overset{\phi(2.06)\approx 0{,}98}{\Longrightarrow} \quad d_x = 2{,}06 \cdot \sqrt{Np(1-p)} + Np = 174{,}8$$

Der Kessel muss mindestens <u>175 Teile</u> fassen.

Zusammenfassung

- **Funktionen zweidimensionaler Zufallsvariablen**

(1)
$$U_1 = g_1(X, Y); \qquad U_2 = g_2(X, Y) \tag{7.4-1}$$

(2)
$$x = h_1(u_1, u_2); \qquad y = h_2(u_1, u_2)$$
$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

(3)
$$f_{U_1U_2}(u_1, u_2) = f_{XY}\Big(h_1(u_1, u_2); h_2(u_1, u_2)\Big) \cdot |J| \tag{7.4-2}$$

- **Tschebyscheffsche Ungleichung** Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und X eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$:

$$P\big\{|X - c| \geq \epsilon\big\} \leq \frac{1}{\epsilon^2} E\big\{[X - c]^2\big\} \tag{7.8-4}$$

- **Zentraler Grenzwertsatz** $X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_n) = m < \infty$ und $D^2(X_n) = d^2 < \infty$, dann gilt mit $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{S_N - Nm}{\sqrt{N}d} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy. \tag{7.8-10}$$

- **Satz von de Moivre-Laplace** Ist S_N eine binomialverteilte ZV mit den Parametern N und p, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{S_N - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy. \tag{7.8-11}$$

Bemerkung: Für praktische Zwecke ($N < \infty$) reicht $D^2(S_N) \geq 9$.