

Wahrscheinlichkeitstheorie – Lösungen zu Übung 1

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1

Drei Bits werden über einen digitalen Nachrichtenkanal übertragen. Dabei kann jedes Bit verfälscht oder richtig empfangen werden.

- Geben Sie den Ergebnisraum Ω an. Wie viele Elemente besitzt Ω ?
- Es sei $A_i = \{i\text{-tes Bit ist verfälscht}\}$; $i = 1, 2, 3$. Geben Sie A_1 an.
- Stellen Sie folgende Ereignisse mit Hilfe der A_i und passender Mengenoperationen dar:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\text{alle Bits sind verfälscht}\} \\ B_2 &= \{\text{mindestens ein Bit ist verfälscht}\} \\ B_3 &= \{\text{kein Bit ist verfälscht}\} \\ B_4 &= \{\text{höchstens ein Bit ist verfälscht}\} \end{aligned}$$

Lösung

- Ergebnisraum: Menge aller Ergebnisse ω eines Zufallsexperiments.

$$\begin{aligned} \Omega &= M^3 = \{(b_1 b_2 b_3) \mid b_i \in M \text{ für } i = 1, 2, 3\} \text{ mit } M = \{V(\text{verfälscht}), R(\text{richtig})\} \\ |\Omega| &= |\tilde{V}_2^{(3)}| = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad (\text{Variation mit Wiederholungen}) \end{aligned}$$

- Ereignis: *Teilmenge* von Ω : Auswahl *günstiger* Ergebnisse

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(V b_2 b_3) \mid b_2, b_3 \in M\} \\ &= \{(V R R), (V R V), (V V R), (V V V)\} \end{aligned}$$

- A_i sind Indikatorereignisse für Übertragungsfehler:

Schnitt: $A \cap B = AB = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$

$$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(V V V)\}$$

Vereinigung: $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$

$$\begin{aligned} B_2 &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ &= \{(V R R), (V R V), (V V R), (V V V), (R V R), (R V V), (R R V)\} \end{aligned}$$

Komplement: $\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

$$B_3 = \bar{B}_2 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} \stackrel{(\text{DeMorgan})}{=} \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \{(R R R)\}$$

kein oder ein Bit verfälscht

$$\begin{aligned} B_4 &= \underbrace{\overline{A_1 A_2 A_3}}_{\text{Ereignis in KEINER der "das N.te bit ist verfälscht"-Mengen}} + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \underbrace{\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3}_{\text{das dritte Bit ist verfälscht, aber NICHT das erste oder zweite}} \\ &= \{(R R R), (V R R), (R V R), (R R V)\} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Im Folgenden seien Wiederholungen ausgeschlossen.

- a) Geben Sie Menge aller dreistelligen Zahlen an, die mit den Ziffern 2, 3, 5, 6, 7, 9 gebildet werden können.
- b) Wie viele Elemente hat diese Menge?
- c) Wie viele davon sind kleiner als 400?
- d) Wie viele sind ungerade?

Lösung

- a) Dreielementige Tupel der Ziffern ohne Wiederholung:

$$M = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\} ; |M| = 6$$
$$\Omega = \{(h z e) \in M^3 \mid h \neq z, z \neq e, e \neq h\}$$

- b) Variation ohne Wiederholungen (ohne Zurücklegen):

$$|\Omega| = \left| V_6^{(3)} \right| = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

- c) Hier unterliegt die Ziehung der ersten Stelle, die "Hunderter", der Bedingung $h < 4$; es gilt

$$C = \{(h z e) \in \Omega \mid h < 4, \} \rightarrow h \in \{2, 3\}$$
$$|C| = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$$

So kommt das obige Produkt zu Stande: 2 Möglichkeiten für die Einer, bleiben fünf mögliche Ziffern für die Zehner, bleiben vier mögliche Einer.

- d) Es wird zunächst die Stelle mit Nebenbedingung, hier die "Einer", gezogen:

$$D = \{(h z e) \in \Omega \mid e \text{ ungerade}\} \rightarrow e \in \{3, 5, 7, 9\}$$
$$|D| = 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$$

Aufgabe 3

- a) In dem aus vier Rechnern bestehenden Rechnernetz A (Abbildung 1) fallen zufällig zwei Verbindungen V_i aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass trotz des Ausfalls noch drei Rechner miteinander verbunden sind?
Bemerkung: Alle Verbindungen haben die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit.

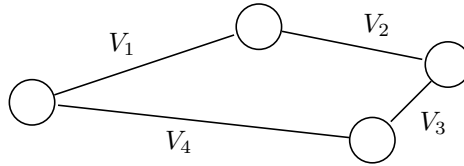


Abbildung 1: Rechnernetz A

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Rechnernetz B (Abbildung 2) alle Rechner noch verbunden sind, wenn höchstens drei Verbindungen ausfallen?
Bemerkung: Alle möglichen Ausfälle treten gleich häufig auf.

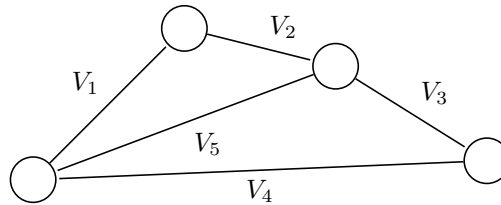


Abbildung 2: Rechnernetz B

Lösung

- a) Modell: Ergebnisse sind Tupel aus zwei verschiedenen Verbindungen

$$\Omega = \{\{v, w\} \in V^2 ; v \neq w\} \text{ mit } V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$$

Auswahl ohne Wiederholung, ohne Beachtung der Reihenfolge $\rightarrow$ Kombination ohne Zurücklegen

$$|\Omega| = \left| C_4^{(2)} \right| = \binom{4}{2} = 6$$

Trick: Gegenereignis $\bar{A}$ "Netz wird halbiert" betrachten. Durch genaues Hinsehen:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \{\{V_1, V_3\}, \{V_2, V_4\}\} \\ |\bar{A}| &= 2 \\ |A| &= |\Omega| - |\bar{A}| \\ &= 6 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Laplace: Alle Elementarereignisse gleichhäufig ✓ Ergebnisraum endlich ✓

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- b) Zählen der möglichen Verbindungen:

$$\Omega = \{0 \dots 3 \text{ Verbindungen fallen aus}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\{\}\} \cup \{\{v\} \mid v \in V\} \cup \{\{v,w\} \mid v,w \in V\} \cup \{\{v,w,x\} \mid v,w,x \in V\} \\
|\Omega| &= 1 + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} \\
&= 26
\end{aligned}$$

Hier ist das Gegenergebnis einfacher zu berechnen:

$$B = \{ \text{alle Rechner noch verbunden} \}$$

$$\overline{B} = \{\{V_1, V_2\}, \{V_3, V_4\}, \{V_1, V_4, V_3\}, \dots\} \quad \text{„alle Möglichkeiten durchspielen für } N=0\dots 3\text{“}$$

$$|\overline{B}| = 0 + 0 + 2 + 10 = 12 \quad \text{„10/10 bei } N = 3; 2/10 \text{ bei } N = 2, \text{ sonst keine“}$$

Ergebnisraum endlich und Elementarereignisse gleichhäufig $\rightarrow$ Laplace

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{|\overline{B}|}{|\Omega|} = \frac{14}{26}$$

Aufgabe 4

Ein elektronisches Schaltwerk (Abbildung 3) besteht aus fünf Relais (1, ..., 5). Jedes Relais ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 geschlossen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ein Strom vom Eingang E zum Ausgang A fließen?

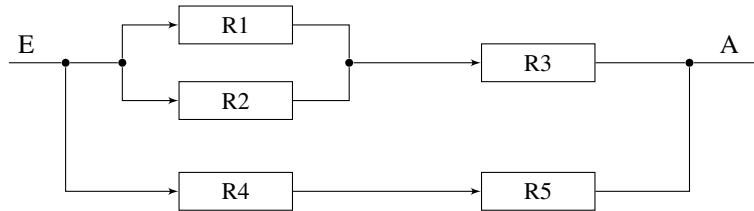


Abbildung 3: Elektronisches Schaltwerk

Lösung

geg.: $\Omega = \{ (r_1 r_2 r_3 r_4 r_5) \mid r_i \in \{G(\text{geschlossen}), O(\text{fffen})\} ; i \in \{1, \dots, 5\} \}$
 $|\Omega| = 2^5 = 32$ „Variation (d.h. unter Beachtung der Reihenfolge) mit WDH“

ges.: $P(\text{Strom } E \rightarrow A)$

Überlegung: Laplace (endlich, gleich wahrscheinlich)

Hilfsdefinition: Indikatorereignisse $A_i = \{ (r_1 r_5) \in \Omega \mid r_i = G \}$ für $i = 1 \dots 5$

$$\begin{aligned}
 S &= \{ \text{Strom } E \rightarrow A \} = (A_1 \cup A_2)A_3 \cup A_4A_5 \\
 |S| &= |A_1A_3 \cup A_2A_3 \cup A_4A_5| = ? \quad \implies \quad \text{Nutze: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\
 P(S) &= P(A_1A_3 \cup A_2A_3 \cup A_4A_5) \\
 &= P(A_1A_3 \cup A_2A_3) + P(A_4A_5) - P(A_1A_3A_4A_5 \cup A_2A_3A_4A_5) \\
 &= P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3) + P(A_4A_5) \\
 &\quad - P(A_1A_3A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) + P(A_1A_2A_3A_4A_5) \\
 &= \frac{1}{|\Omega|} (|A_1A_3| + |A_2A_3| + |A_4A_5| - |A_1A_2A_3| - |A_2A_3A_4A_5| - |A_1A_3A_4A_5| + |A_1A_2A_3A_4A_5|)
 \end{aligned}$$

Benutze: Wenn ich ein Relais “festlege” sind 5-1 Relais noch frei zu wählen. Für 1 bis 5 festgelegte Relais folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 |A_iA_j| &= 1 \cdot 1 \cdot 2^3 &= 8 & \quad i \neq j \quad i, j, k \in \{1, \dots, 5\} \\
 |A_iA_jA_k| &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^2 &= 4 & \quad i \neq j \neq k \\
 |A_iA_jA_kA_l| &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^1 &= 2 & \quad i \neq j \neq k \neq l \\
 |A_iA_jA_kA_lA_m| &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^0 &= 1 & \quad i \neq j \neq k \neq l \neq m
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$P(S) = \frac{1}{32} (8 + 8 + 8 - 4 - 2 - 2 + 1) = \frac{17}{32}$$

Aufgabe 5

In einer Lostrommel befinden sich 80 Nieten und 20 Gewinne. Von den 20 Gewinnen ist einer der Hauptgewinn. Es werden vier Lose gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- der Hauptgewinn gezogen wird.
- mindestens ein gezogenes Los ein Gewinn ist.
- höchstens ein gezogenes Los ein Gewinn ist.
- man genau einen Gewinn zieht, der aber nicht der Hauptgewinn ist.

Lösung

Beobachtungen:

- kein Zurücklegen (WDH); Reihenfolge egal $\implies$ Kombination $\implies |\Omega| = \binom{100}{4}$
- endlich viele Lose und alle Ziehungen gleich wahrscheinlich $\implies$ Laplace

Modell:

$$L = \{H, G_2, \dots, G_{20}, N_1, \dots, N_{80}\} \quad (G_1 = H)$$

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} \in L^4 \mid l_i \neq l_k \iff i \neq k \right\}$$

$\rightarrow$ Laplace-Experiment (Lose als Ergebnis sind gleichhäufig; Lostypen nicht!)

a)

$$A = \{\text{Hauptgewinn}\} = \{\dots\} \rightarrow \text{nur } |A| \text{ relevant}$$

Wir legen eins der vier Lose fest (d.h. der Hauptgewinn). Der kann an erster, zweiter, dritter oder vierter Stelle gezogen werden. Die übrigen 3 Lose sind jetzt also noch "frei" zu ziehen aus den verbleibenden 99 Losen:

$$|A| = \frac{\text{Anzahl unter Beachtung der Reihenfolge}}{\text{Anzahl der Anordnungen}} = \frac{(1 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97) \cdot 4}{4!} = \binom{1}{1} \binom{99}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$\text{nach ausgiebigem Kürzen der Faktoren in } \frac{\binom{99}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$$= \frac{4}{100}$$

Merke: Hypergeometrische!

b) $\bar{B} = \{\text{kein Gewinn}\}$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{\binom{20}{0} \binom{80}{4}}{\binom{100}{4}} \approx 1 - 0,403 = 0,597$$

c) $C = \bar{B} \cup C_1$; $C_1 = \{\text{genau ein Gewinn}\}$

$$P(C) = P(\bar{B}) + \underbrace{\frac{\binom{20}{1} \binom{80}{3}}{\binom{100}{4}}}_{=0} - P(\bar{B}C_1) = 0,403 + 0,419 = 0,822$$

d) $D = \{\text{genau ein Nebengewinn}\}$

$$P(D) = \frac{\binom{1}{0} \binom{19}{1} \binom{80}{3}}{\binom{100}{4}} = 0,398 \quad \stackrel{\text{oder}}{=} P(D|C_1) \cdot P(C_1) \approx \frac{19}{20} \cdot 0,419 = 0,398$$

Zusammenfassung

- Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots, \omega_N\}$ (Menge aller Ereignisse ω_n)
Ereignis $A \subset \Omega$ (Teilmenge von Ω), sicheres Ereignis Ω , unmögliches $\emptyset$
 Elementarereignis $A = \{\omega_n\} \subset \Omega$ (einelementige Teilmenge Ω) (Def. 2.1-1)

- **Laplacesches Zufallsexperiment:**
 Alle Elementarereignisse $\{\omega_n\}$ eines endlichen Ergebnisraums Ω treten **gleichhäufig** auf. (Def. 2.2-2)

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse } \{\omega_n\} \subset A}{\text{Gesamtzahl der Elementarereignisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (\text{Def. 2.2-3})$$

- Kombinatorik: Auswahl von K aus N Elementen

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen	
Mit Reihenfolge	$ \tilde{V}_N^{(K)} = N^K$	$ V_N^{(K)} = \frac{N!}{(N-K)!}$	(Bild A-1)
Ohne Reihenfolge	$ \tilde{C}_N^{(K)} = \binom{N+K-1}{K}$	$ C_N^{(K)} = \binom{N}{K}$	

- **Wahrscheinlichkeiten und Mengenoperationen:**

$$\text{Negation:} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (\text{Satz 2.3-1})$$

$$\text{Vereinigung:} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- de Morgansche Gesetze:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad (\text{Kap. 2.1})$$

- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \quad (\text{Kap. 2.1})$$

- **Hypergeometrische Verteilung:** von n aus N ausgewählten sind k aus M günstig.

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k \leq n \leq N; k \leq M \leq N \quad (\text{Kap. 2.2})$$